
REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Esta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

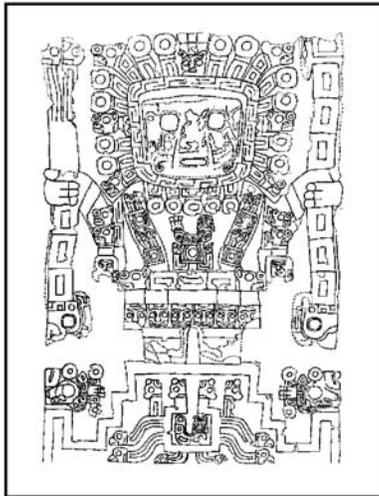
Sociedad Boliviana de Física	Instituto de Investigaciones Físicas	Carrera de Física
Dr. Eduardo Palenque Vidaurre Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: ozono@mail.megalink.com Tel.: (591-2)2799155 Fax:(591-2)2792622	Lic. Alfonso Velarde Chávez Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622	Lic. Deterlino Urzagasti Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: urza@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Ramiro de La Reza Observatorio Nacional CNPq Rua General Bruce 586 20921-400 Rio de Janeiro-Brasil e-mail: delareza@danp6.on.br	Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira Instituto de Fisica Universidade Federal Fluminense C.P. 1002966, Niteroi, RJ-Brasil e-mail: pmco@regulus.if.uff.br
Dr. Juan C. Muzzio Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata La Plata-Argentina e-mail: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar	Dr. Carlos Navia Instituto de Física Universidad Federal Fluminense Av. Gen. Milton Tavares de Souza 24210-340, Niteroi, RJ-Brasil e-mail: gfcnoj@portela.if.uff.br
Dr. Oscar Antonio Rondón Institute of Nuclear and Particle Physics University of Virginia McCormick Road, Charlottesville, VA 22901 804 924-6787, USA e-mail: or@virginia.edu	Dr. Edison H. Shibuya Instituto de Fisica Gleb Wataghin Universidade Estadual de Campinas C.P. 6165, 13.083-970 Campinas, SP-Brasil e-mail: shibuya@ifi.unicamp.br
Dr. Oscar Saavedra Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: saavedra@to.infn.it	Dr. Antonio Tavares da Costa Universidade Federal de Lavras Departamento de Ciências Exatas e-mail: antc@stout.ufla.br
Dr. Piero Galeotti Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: galeotti@to.infn.it	Dr. Sérgio Barroso Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física Gleb Wataghin e-mail: barroso@ifi.unicamp.br
Prof. Jean-Louis Deneubourg Universidad Libre de Bruselas e-mail: jldeneub@ulb.ac.be	Dr. Newton Figueiredo Universidade Federal de Itajubá C.P.50-CEP:37500-903, Itajubá-MG-Brasil e-mail: newton@efe.br
Dra. Sofia A. Cora Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata La Plata-Argentina email: sacora@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar	Lic. Renán Cabrera Physics Department Windsor University e-mail: rencabla@yahoo.com

ISSN 1562-3823

También indexada en PERIODICA



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 11
OCTUBRE DE 2005

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

También indexada en PERIODICA

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia

Editores: Alfonso Velarde Ch., Eduardo Palenque V. y Deterlino Urzagasti.

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.
Tel: (591 2)2792999; FAX: (591 2)2792622.

Portada: Ecuaciones de Campo de Einstein. Graffiti (de autor desconocido) pintado en una locomotora del Cementerio de Ferrocarriles de Uyuni, Bolivia.

Autor de la foto: Joachim Reuder (Mayo, 2005).

IMPRESO EN BOLIVIA - PRINTED IN BOLIVIA

PROF. CESAR LATTES

Cesare Mansueto Giulio Lattes nació en Curitiba, Brasil el 11 de julio de 1924; falleció el 9 de marzo de 2005 a los 80 años de edad.

Su carrera científica se inició a mediados de los años 40, en el entonces Departamento de Física de la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de la Universidad de São Paulo, cuando publica un artículo científico sobre la abundancia de núcleos en el universo, bajo la orientación de Gleb Wataghin.

Desde entonces, su nombre estuvo ligado a resultados científicos de gran repercusión y a iniciativas de las más fecundas para el progreso de la ciencia en el Brasil y en América del Sur.

En 1947, Cesar Lattes como miembro del grupo de la universidad de Bristol, dirigido por C.F.Powell (Inglaterra) y G.Occhialini (Italia), coloca en la montaña de Chacaltaya en



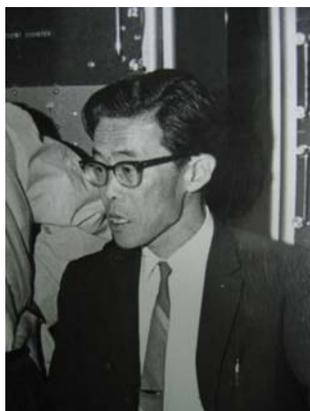
La Paz, Bolivia placas de emulsiones nucleares a fin de verificar la existencia del Pión (partícula responsable de la interacción nuclear).

El exitoso descubrimiento del Pión en estas placas fue el mayor logro científico de su carrera. Como consecuencia de este descubrimiento, Hideki Yukawa quien había predicho la existencia de este mesón, recibe el premio Nobel en 1947 y Cecil F. Powell el premio Nobel de 1950.

Este descubrimiento también permitió, con la colaboración de Cesar Lattes, la creación del Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya, dependiente de la Universidad Mayor de San Andrés que, hasta hoy, es un importante centro internacional de investigación en Rayos Cósmicos.

Podemos decir con absoluta convicción que Cesar Lattes fue impulsor y punto de partida para el desarrollo de la física en Bolivia.

PROF. KOICHI KAMATA



Ha fallecido el Prof. Koichi Kamata, destacado físico japonés del Instituto de Investigaciones Físico Químicas de RIKEN.

En Bolivia, lo recordamos como uno de los principales investigadores del proyecto BASJE (Experimento Conjunto sobre Chubascos Atmosféricos) en el laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya, allá por el año 1965.

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

ESTUDIO SOBRE LA DETECCIÓN DE AFLATOXINA EN LA CASTAÑA (<i>Bertholetia Excelsa</i>), MEDIANTE FLUORESCENCIA BAJO LUZ ULTRAVIOLETA	<i>R. Forno, A. Velarde</i>	1
EL GEODÍNAMO EN UN ESQUEMA DE RELAJAMIENTO	<i>V. M. Peñafiel</i>	9
TRF SOBRE DATOS POSTMUESTRADOS	<i>V. M. Peñafiel</i>	14
MODELO PARA GALAXIAS ESPIRALES	<i>Urzagasti D.</i>	21
EL PÉNDULO ELÁSTICO CLÁSICO VISTO COMO UN PROBLEMA CUÁNTICO CRISTALINO	<i>Diego Sanjinés C.</i>	31
ALGUNAS CARACTERÍSTICAS METEOROLÓGICAS DE LA LOCALIDAD DE TAMBO QUEMADO – BOLIVIA	<i>R. Torrez, F. Ghezzi, E. Palenque</i>	40
INFLUENCIA DEL RUIDO EN LA SINCRONIZACIÓN DE DOS OSCILADORES FOTOCONTROLADOS	<i>G.M. Ramírez, J.L. Guisset, J.L. Deneubourg</i>	44

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

LOS ARTÍCULOS DEL <i>ANNUS MIRABILIS</i> DE ALBERT EINSTEIN	<i>Diego Sanjinés C.</i>	53
SOBRE UN PUNTO DE VISTA HEURÍSTICO CONCERNIENTE A LA PRODUCCIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE LA LUZ	<i>Albert Einstein</i>	55
SOBRE EL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS PEQUEÑAS SUSPENDIDAS EN UN LÍQUIDO ESTACIONARIO, TAL COMO LO REQUIERE LA TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR DEL CALOR	<i>Albert Einstein</i>	62
SOBRE LA ELECTRODINÁMICA DE LOS CUERPOS EN MOVIMIENTO	<i>Albert Einstein</i>	67
¿DEPENDE LA INERCIA DE UN CUERPO DE SU CONTENIDO ENERGÉTICO?	<i>Albert Einstein</i>	78
AMBIENTE ACÚSTICO DEL CENTRO DE LA CIUDAD DE LA PAZ	<i>W. Tavera, S. Barreta, W. Cano</i>	80

CONTENIDO

C. MEMORIAS DE LA REUNIÓN ANUAL DE LA SOBOFI U OTRAS REUNIONES DE FÍSICA

XVII REUNIÓN NACIONAL DE LA SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA, DEL 27 AL 29 DE OCTUBRE DE 2005, COCHABAMBA-BOLIVIA <i>SOBOFI</i>	95
--	----

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

10 ^{MA} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, EXAMEN NACIONAL <i>Bustos R. et. al.</i>	99
---	----

UNA EQUIVOCACIÓN COMÚN EN EL CÁLCULO DE PROPAGACIÓN DE ERRORES (Um Engano Comum em Cálculo de Propagação de Erros) (A Common Mistake in Calculation of Error Propagation) <i>Pereira da Silva et. al.</i>	126
--	-----

LA MAGIA DE LA FÍSICA <i>E. Juaniquina et. al.</i>	133
---	-----

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: ozono@mail.megalink.com

Tel.: (591-2)2799155

Fax:(591-2)2792622

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

Carrera de Física

Lic. Deterlino Urzagasti

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: urza@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

Objetivos

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

La RBF publica artículos, revisiones y colaboraciones en lengua castellana. Se reciben también artículos escritos en inglés, los que son traducidos al castellano por los editores para su publicación.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

Las colaboraciones enviadas para su publicación deberán estar escritas preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar su contribución preferentemente en formato LATEX. Para ello necesitarán el formato de la RBF especificado en los archivos *rbfi.cls* y *rbfi.tex*, los cuales, podrán serles enviados por correo electrónico o podrán ser obtenidos de la página de *internet* de la Carrera de Física de la U.M.S.A. (www.umsa.net.edu.bo/fisica/). En caso contrario, los autores podrán enviar su contribución en formato de texto (extensión *.txt*) ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. En cualquier caso, las figuras deberán ser enviadas preferentemente en formato *postscript* (extensiones *.ps* o *.eps*), o en su defecto en el formato con la extensión *.jpg*.

Las contribuciones, o cualquier consulta sobre la RBF, deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

ESTUDIO SOBRE LA DETECCIÓN DE AFLATOXINA EN LA CASTAÑA (*Bertholetia Excelsa*), MEDIANTE FLUORESCENCIA BAJO LUZ ULTRAVIOLETA

Lic. Ricardo Forno¹, Lic. Alfonso Velarde²

¹*Carrera de Física—UMSA*

²*Instituto de Investigaciones Físicas—UMSA*

RESUMEN

Se analizan los espectros de emisión, bajo luz ultravioleta, de castañas con Aflatoxina y castañas sanas. Se comparan las relaciones de intensidad entre el pico de fluorescencia de 496nm y el pico reflejado de la fuente de 441nm para establecer un criterio que permita distinguir las castañas enfermas de las sanas.

1. INTRODUCCIÓN

Las aflatoxinas son metabolitos tóxicos producidos por dos tipos de hongos: *Aspergillus Flavus* y *Aspergillus Parasiticus*. Estos hongos se desarrollan en el suelo entre la vegetación en descomposición bajo condiciones de alta temperatura y humedad. Atacan a una gran variedad de granos y otros alimentos, entre ellos a la castaña [1].

En la actualidad, Bolivia es el primer exportador mundial de castaña [2], produce aproximadamente el 60% de la producción mundial. Por lo tanto, el control de calidad de la castaña que será exportada es de gran importancia económica.

El problema de la contaminación de la castaña por estos hongos y, por tanto su “infección” con Aflatoxina, es sumamente grave dado que la Aflatoxina es tóxica para el organismo humano y se ha comprobado, en pruebas con animales, que es cancerígena [3]. Existen estrictas regulaciones en el control del contenido de Aflatoxina en los productos alimenticios, especialmente de la Comunidad Europea, que ponen en serio riesgo las exportaciones de Castaña del país.

El método más directo para detectar la posible presencia de Aflatoxina es por fluorescencia bajo luz ultravioleta [4]. Este método es utilizado para separar manualmente las castañas infectadas de las sanas.

Las Aflatoxinas G son las más fluorescentes con un color verde azulado (cyan) cuando son expuestas a luz ultravioleta. Las Aflatoxinas B fluorescen con un color azul profundo. Aunque son más abundantes, son menos sensibles a la fluorescencia.

El empleo de la fluorescencia es un buen método para detectar la posible presencia de Aflatoxinas, sin embargo, no permite obtener indicadores cuantitativos del contenido de la sustancia. En efecto, aún con una buena técnica, muestras de fluorescencia brillante pueden contener menos Aflatoxina que muestras débilmente fluorescentes. De hecho, hay también sustancias en la Castaña que fluorescen bajo luz ultravioleta pero que no están asociadas con la Aflatoxina.

La fluorescencia en las muestras contaminadas no es estable y puede desaparecer en algunas semanas cuando

TABLA 1

Resultados de la calibración.

	Longitud de onda (nm)	N° de Canal
H_{α}	434,05	236
H_{β}	486,13	291
H_{γ}	656,28	459
$He - Ne$	632,80	441

éstas son expuestas continuamente a radiación visible o ultravioleta; sin embargo, la toxina no habrá desaparecido. Por lo tanto, las castañas que podrán ser analizadas mediante el método de fluorescencia deben ser frescas.

Por todo esto, es necesario aplicar otro tipo de pruebas para confirmar y cuantificar el contenido de Aflatoxina en muestras que hayan dado positivo con la prueba de la fluorescencia bajo luz ultravioleta.

El presente estudio busca caracterizar la fluorescencia de la Aflatoxina G con el propósito de poder desarrollar un método de identificación de las castañas infectadas.

2. INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

Para realizar los diferentes análisis espectrales utilizamos el espectrofotómetro UV-VIS IIF1 [5], instrumento que fue desarrollado por el Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés. El UV-VIS IIF1 permite realizar un barrido desde los 200nm hasta los 850nm con pasos de 1nm.

La calibración espectral del equipo se realizó empleando dos tipos de fuentes patrón de emisiones espectrales, correspondientes a un haz de rayos láser de He-Ne y una lámpara de vapor de Hidrógeno respectivamente [6].

La tabla 1 muestra las longitudes de onda y los canales correspondientes. En la figura 1 se muestra el ajuste lineal.

TABLA 2

Picos característicos de la fuente de radiación ultravioleta empleada para iluminar las muestras.

Color	Longitud de onda	Ancho a media altura
Ultravioleta	$\approx 325nm$	$\approx 10nm$
Ultravioleta—Violeta	$\approx 380nm$	$\approx 60nm$
Violeta azulado	$\approx 410nm$	$\approx 15nm$
Azul violeta	$\approx 443nm$	$\approx 10nm$
Rojo carmesí—infrarrojo	$\approx 750nm$	$\approx 50nm$
Infrarrojo	$\approx 816nm$	$\approx 4nm$

Calibración del Monocromador

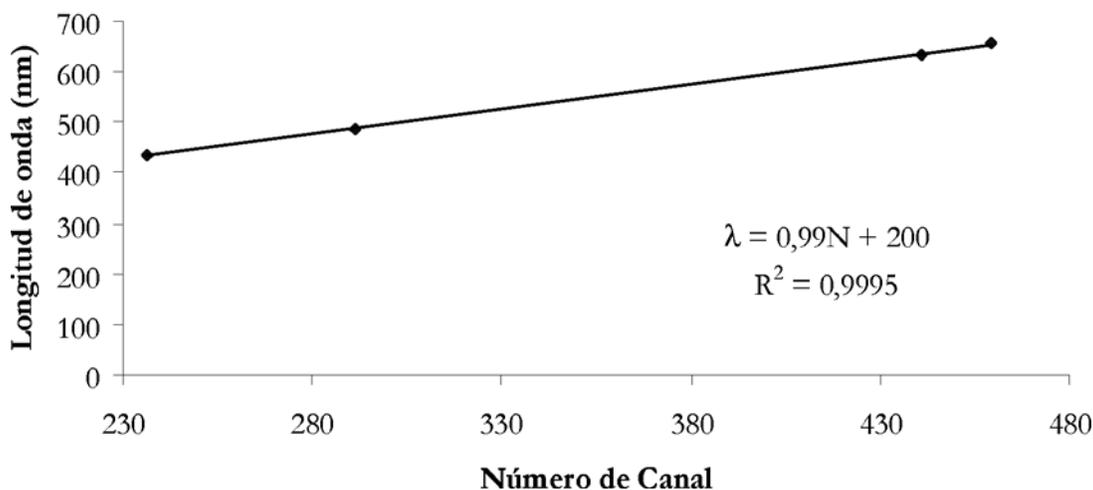


Figura 1. Ajuste lineal.

3. MÉTODO DE ANÁLISIS

Bajo la luz ultravioleta proporcionada por una lámpara, se observan dos tipos de fluorescencia en las castañas enfermas. Unas fluorescen con un color verde azulado brillante y otras, en cambio, presentan una fluorescencia de color naranja mate.

Para determinar los espectros de fluorescencia que se observan bajo luz ultravioleta en las castañas enfermas, se colocaron muestras de raspaduras de castaña con fluorescencia verde, naranja y también de castañas sanas, sobre un fondo de papel negro. Luego, se ilumina la muestra desde arriba con la lámpara de luz ultravioleta. Con la ayuda de una fibra óptica se lleva la luz de la muestra al espectrofotómetro y se obtiene, mediante un software diseñado para la captura de espectros, los datos del espectro en el computador. En la figura 2, se ilustra el dispositivo experimental.

4. ESPECTRO DE LA FUENTE DE LUZ ULTRAVIOLETA

La fuente de luz ultravioleta utilizada es la que usan productores bolivianos de castaña el momento de realizar

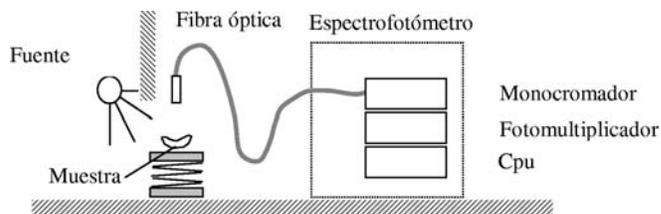


Figura 2. Esquema del equipo de medida.

la selección visual de castañas enfermas. Su espectro de emisión se muestra en la figura 3.

Realizando un análisis del espectro de emisión de la fuente UV se puede determinar un conjunto de picos característicos de la emisión de la fuente. En la tabla 2 se describen los mencionados picos y sus respectivas características.

5. ESPECTRO DEL FONDO. PAPEL NEGRO

Puesto que las muestras de castaña están soportadas en algún material y éste, a su vez, tiene sus propias ca-

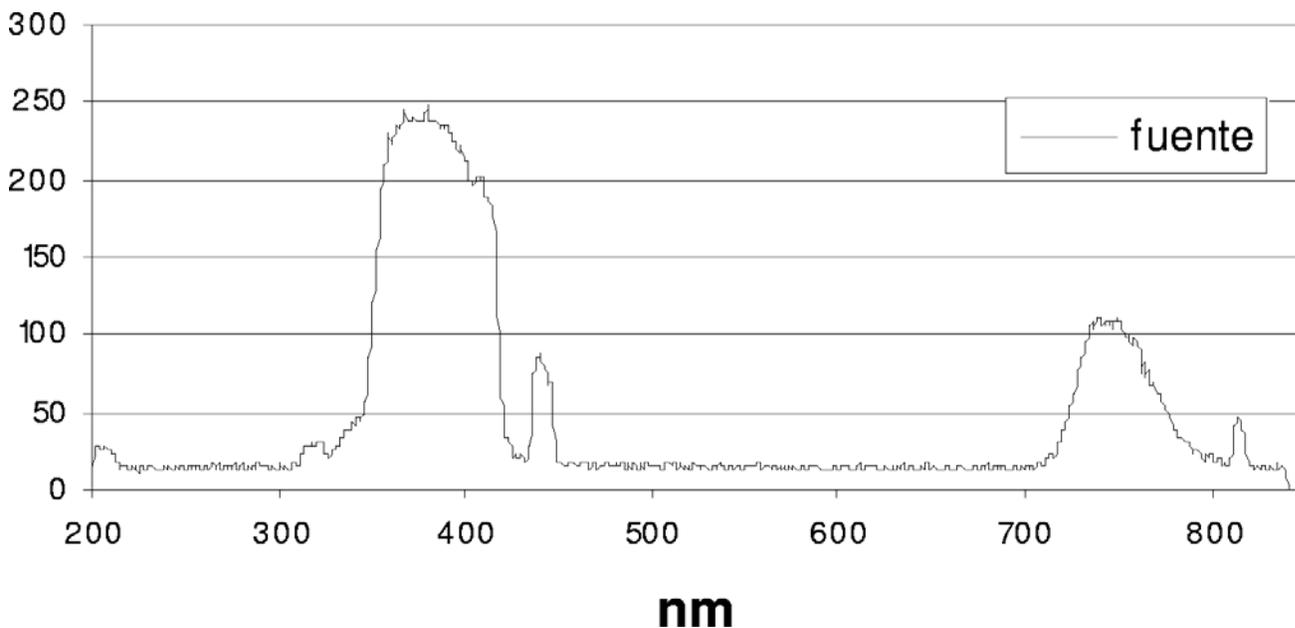


Figura 3. Espectro de emisión de la fuente ultravioleta.

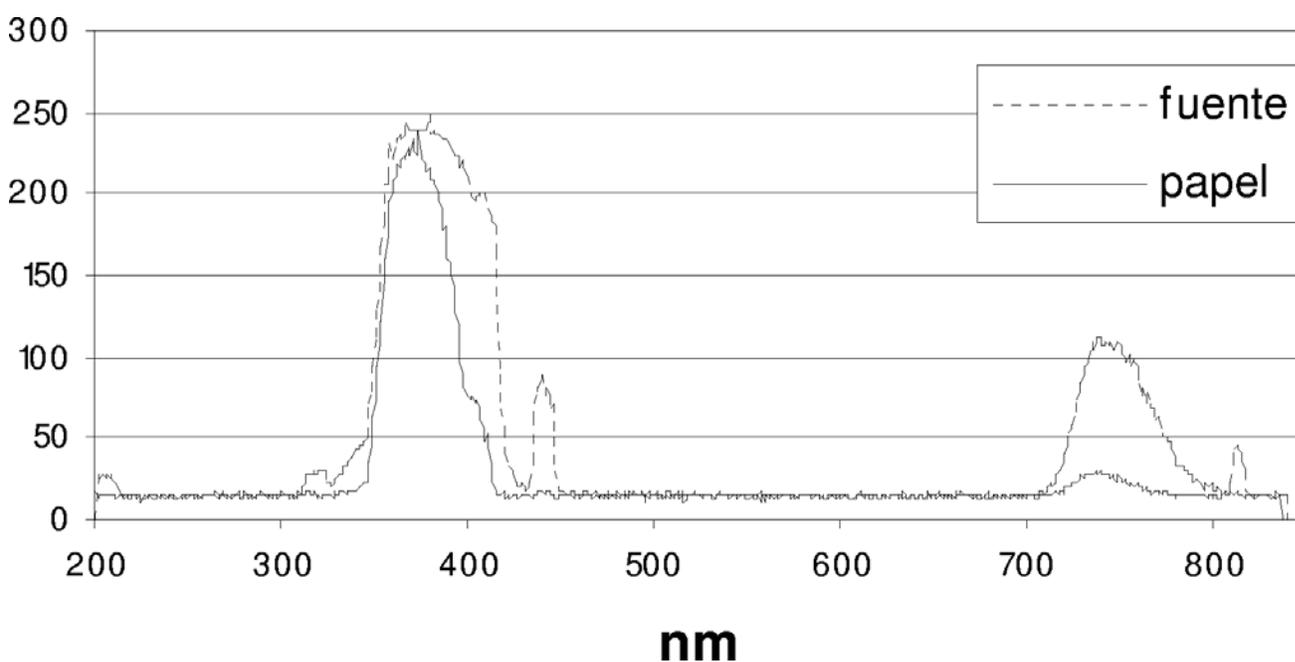


Figura 4. Espectro del papel negro bajo luz ultravioleta.

racterísticas espectrales de reflexión, es necesario realizar un análisis espectral de reflectancia del material con el cual se soporta las muestras (fondo). En la figura 3 se muestra, en línea continua, el espectro mencionado para nuestro soporte, que en nuestro caso se trataba de papel negro utilizado en los sobres para proteger placas de rayos X; adicionalmente y para fines de comparación, en la figura 4 se muestra el espectro de la fuente ultravioleta (línea punteada). Hay que aclarar que las intensidades no son directamente comparables. No se hizo ninguna calibración en intensidad para poder comparar la emisión

directa de la fuente con la reflexión del papel negro.

Como se puede observar, el papel negro absorbe todo el espectro visible pero refleja el ultravioleta ($\lambda < 410\text{nm}$), en particular se puede apreciar un pico centrado en $\approx 375\text{nm}$ y con un ancho a media altura de aproximadamente $\approx 40\text{nm}$ (sería conveniente buscar otro material negro de fondo que no tenga tanta reflectancia en el ultravioleta como muestra el papel negro que se utilizó).

En la región infrarroja se ve que el pico de la fuente es absorbido casi en su totalidad.

TABLA 3

Picos espectrales correspondientes a la fluorescencia verde de la castaña.

	Color	Longitud de onda	Ancho a media altura
1	Ultravioleta	$\approx 354nm$	$\approx 20nm$
2	Violeta	$\approx 410nm$	$\approx 30nm$
3	Azul ultramar	$\approx 443nm$	$\approx 20nm$
4	Verde azulado (cyan)	$\approx 500nm$	$\approx 40nm$
5	Rojo carmín	$\approx 744nm$	$\approx 30nm$

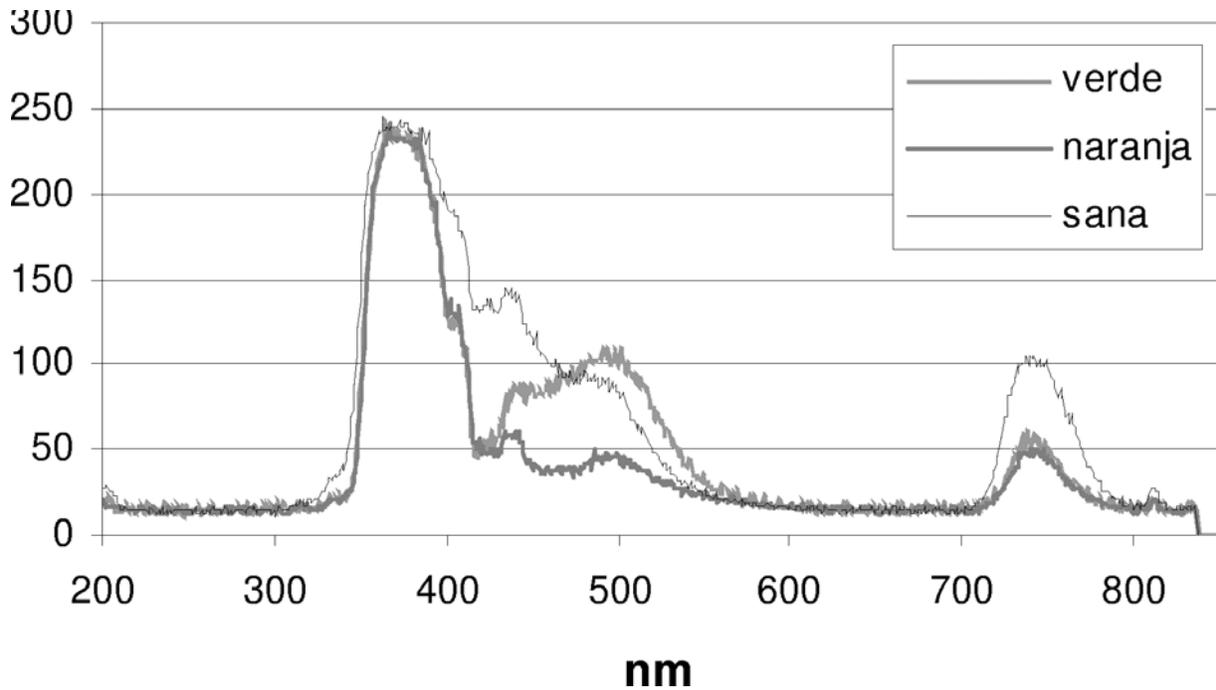


Figura 5. Espectros de castañas infectadas con fluorescencia verde, naranja y sana.

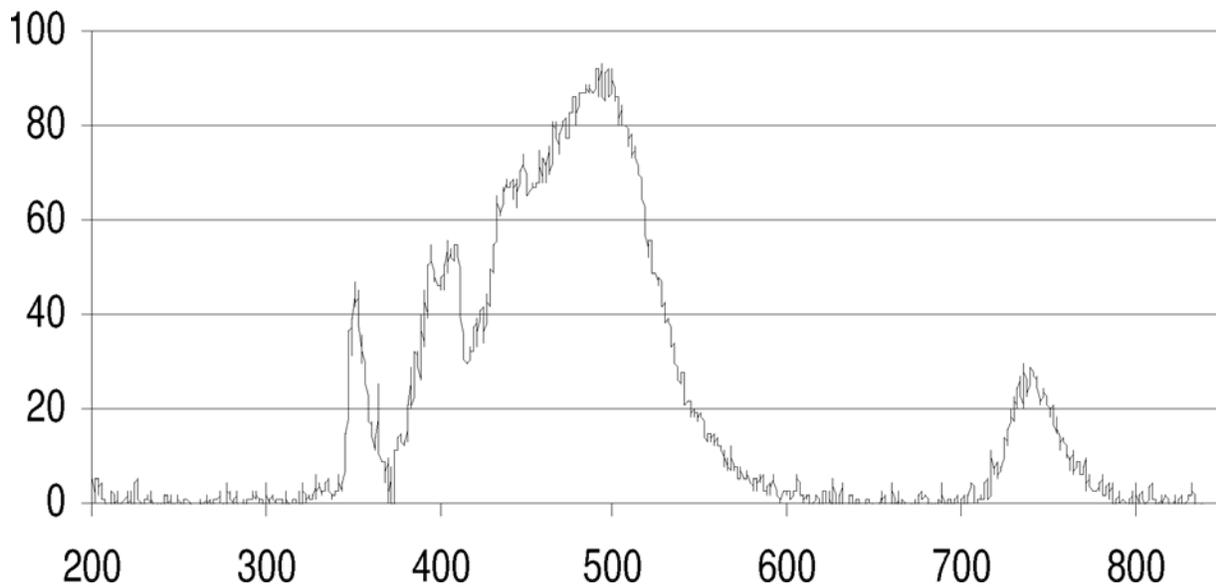


Figura 6. Espectro de castaña infectada con fluorescencia verde menos espectro del fondo.

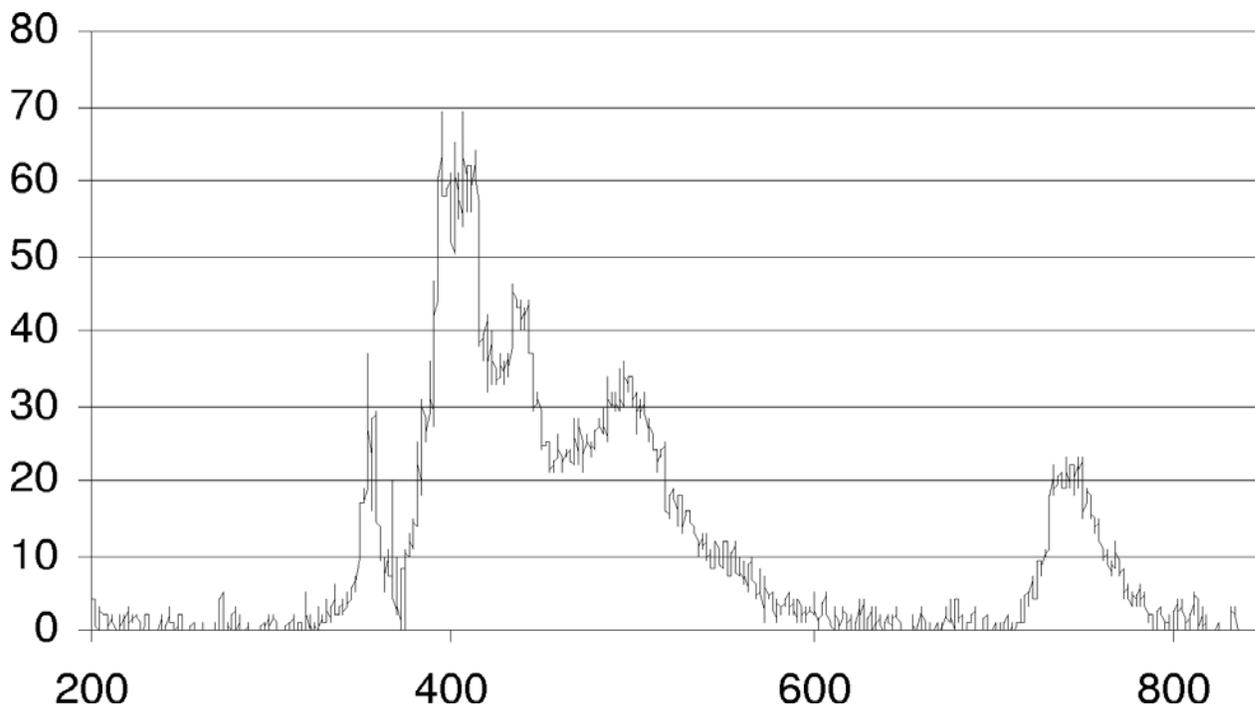


Figura 7. Espectro de castaña infectada con fluorescencia naranja menos espectro del fondo.

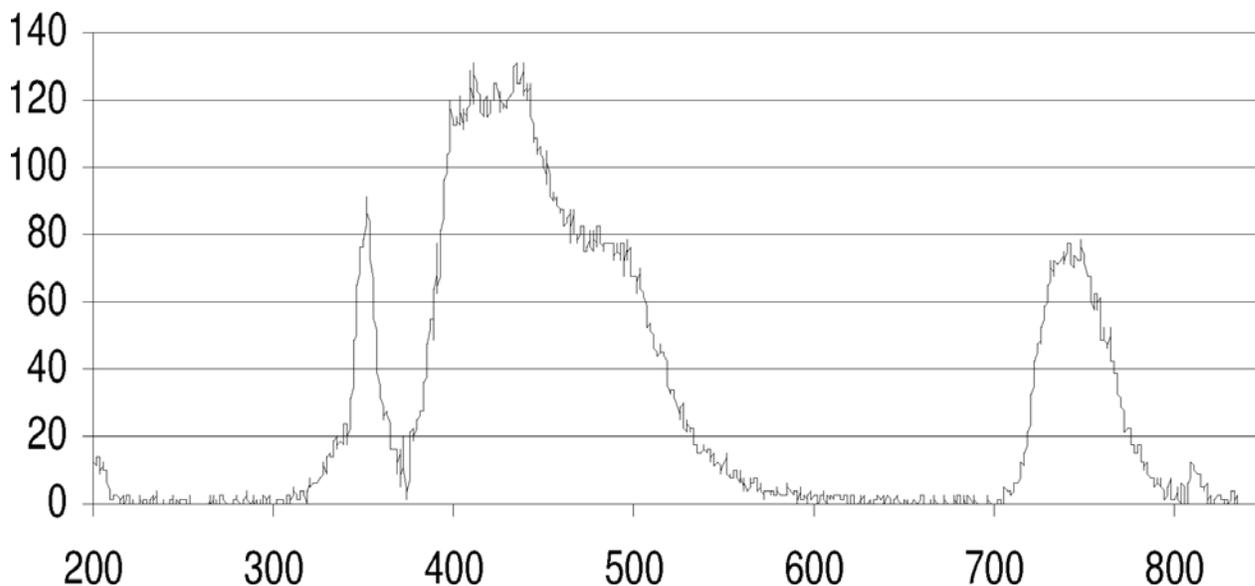


Figura 8. Espectro de castaña sana menos espectro del fondo.

6. ESPECTROS DE FLUORESCENCIA DE MUESTRAS INFECTADAS Y SANAS

Como se mencionó, se observaron, bajo las condiciones experimentales descritas, dos tipos de fluorescencia, la correspondiente a un color verde azulado (cyan) y la correspondiente a un anaranjado. En la figura 5 se muestran tanto los espectros característicos de muestras enfermas como el correspondiente a una muestra de castaña sana. Las diferencias de los espectros mencionados son evidentes, sin embargo, es importante notar que la tarea de discriminar una fluorescencia de la otra o, simplemente

discriminar fluorescencia debida a la una muestra sana de una enferma, no parece ser fácil.

Para realizar un análisis más profundo de los espectros, restamos el espectro correspondiente a la reflexión del fondo, obteniendo los espectros de las figuras 6, 7 y 8.

6.1. Espectro de fluorescencia verde

Al eliminar la contribución del fondo en el espectro correspondiente a una muestra enferma, que presenta fluorescencia verde, se obtiene el espectro mostrado en

TABLA 4
Resultados del ajuste.

	Longitud de onda [nm]	Desviación estándar [nm]	Ancho a media altura [nm]
Pico reflejado	441	4	7
Pico de fluorescencia	496	21	35

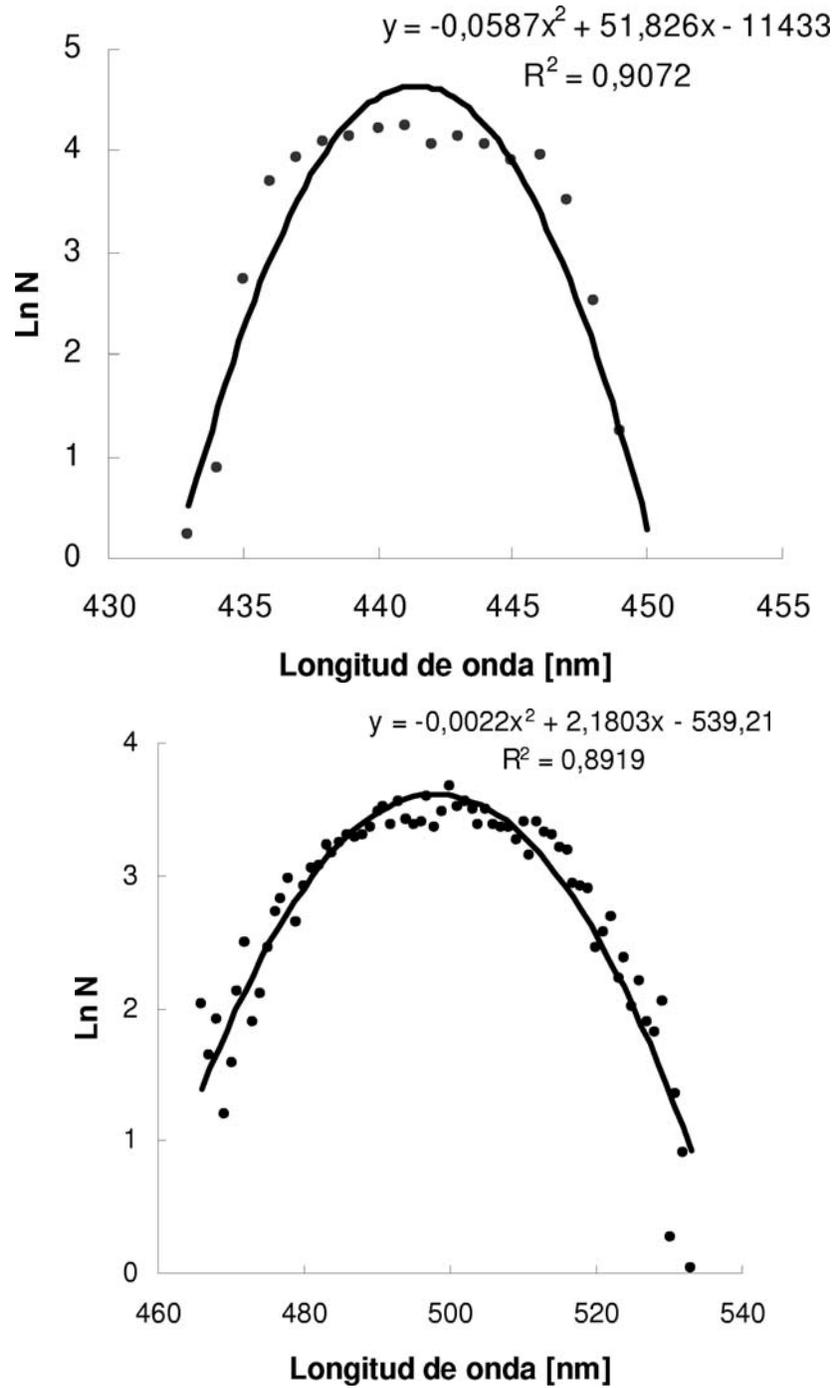


Figura 9. Ajuste al pico de 443nm (arriba) y al de 500nm (abajo).

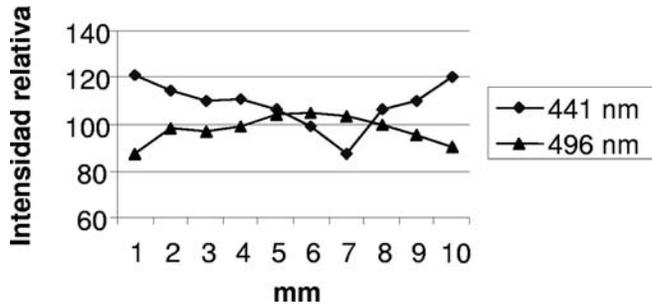


Figura 10. Rastreo sobre una mancha fluorescente verde.

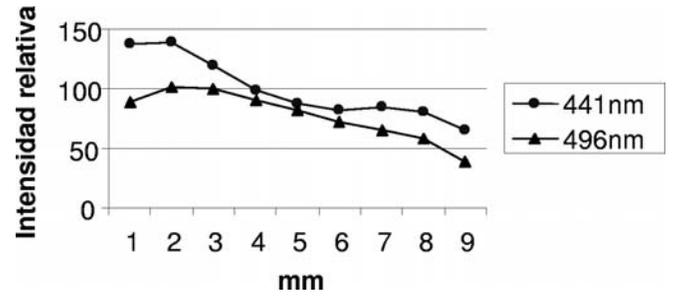


Figura 11. Rastreo sobre una mancha fluorescente naranja.

la figura 6.

Un análisis del espectro mostrado en la figura 6 nos permite encontrar particularidades espectrales de la fluorescencia verde. En la tabla 3 se observan un listado de los picos de interés (designadas por 1, 2, 3, 4 y 5).

Los picos 1, 2, 3 y 5 corresponden a reflejos de la fuente sobre la muestra. Sin embargo, el pico que no existe en la fuente y que aquí aparece, por tanto la fluorescencia, es la línea 4 de color verde azulado (cyan).

6.2. Espectro de fluorescencia naranja

Repitiendo el análisis para el caso de la fluorescencia naranja se observan exactamente los mismos picos, sólo que ahora, la línea 4 que corresponde a la fluorescencia, es mucho menos intensa al compararla con el caso anterior y es más pequeña respecto a los otros picos. La fluorescencia anaranjada no existe, se ve así en virtud de la combinación de las líneas 4 (cyan) y 5 (Carmín), cuyas intensidades son ahora comparables y que combinadas dan el color naranja.

Por lo tanto, el fenómeno de la fluorescencia que se observa en las castañas presumiblemente enfermas, bajo luz ultravioleta, corresponde a un verde azulado o cyan de $\approx 500nm$ (figura 7).

6.3. Espectro de castañas sanas

Nuevamente se repite el análisis, en este caso para castañas sanas, pudiendo observar que el pico correspondiente a los $\approx 500nm$ también existe, aunque no tan diferenciado, dentro del espectro, como en los casos anteriores (figura 8).

7. AJUSTE A LOS PICOS DE INTERÉS

Como se puede ver en la figura 5, la relación entre los picos correspondientes a la fluorescencia ($\approx 500nm$) y $\approx 443nm$, es diferente tanto para la fluorescencia verde, como para la naranja y como para las castañas sanas.

Hemos de concentrar nuestra atención en estos picos haciendo el ajuste de una función normal a los mismos para estimar mejor sus longitudes de onda.

En la figura 9 se muestran estos ajustes.

De acuerdo al ajuste, nuestros resultados son mostrados en la tabla 4.

De los resultados del ajuste se obtiene que:

Pico de fluorescencia: $(496 \pm 9)nm$

Pico reflejado: $(441 \pm 1)nm$

8. ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS INTENSIDADES RELATIVAS DE LA FLUORESCENCIA DE 496nm RESPECTO A LA LÍNEA DE 441nm PROVENIENTE DE LA FUENTE

En el caso de la fluorescencia verde, el pico de 496nm es notoriamente mayor que el de 441nm. En la figura 10 se muestra un rastreo, milímetro a milímetro, realizado sobre una castaña infectada monitoreando las longitudes de onda de interés. Como se puede apreciar, al pasar sobre la mancha fluorescente, el pico de 496nm es mayor que el de 441nm, al contrario de lo que ocurre cuando no se enfoca la mancha fluorescente, es decir, cuando se está observando la parte sana de la castaña.

Haciendo el mismo rastreo, pero para el caso de la fluorescencia naranja, ambos picos son aproximadamente iguales como se muestra en la figura 11.

En la figura 12 se muestra el resultado de graficar la integral del pico centrado en 496nm vs. la integral del pico de 441nm para varias castañas sanas y para varias enfermas con fluorescencia verde.

Vemos que haciendo un ajuste lineal sobre las castañas sanas, se obtiene una regresión razonablemente buena con un coeficiente de regresión lineal $R = 0,883$ y que las castañas infectadas con fluorescencia verde quedan bien separadas, todas sobre una desviación estándar por encima del ajuste lineal.

En la figura 13 se muestra el mismo análisis pero comparando castañas sanas con enfermas con fluorescencia naranja.

En este caso, algunas de las infectadas con fluorescencia naranja quedan sobre la misma recta de regresión de las sanas, sin embargo, debido a que tanto la amplitud de la línea de 496nm como la de 441nm son ambas relativamente pequeñas, como se ve en el espectro de a figura 4, se ubican en la parte baja de la recta de regresión.

La línea vertical que se muestra marca el límite de la media de las medidas de 441nm menos dos desviaciones estándar.

9. CONCLUSIONES

Mediante la comparación de los espectros de emisión de las castañas infectadas, tanto las que fluorescen verde o las que lo hacen en naranja, con el de las sanas,

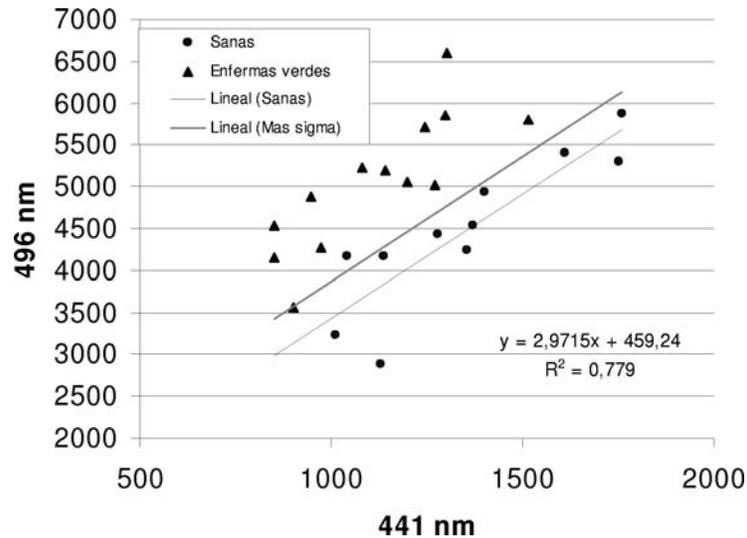


Figura 12. Comparación de la relación entre las integrales de los picos de 496nm (fluorescencia) y 441nm (reflejo de la fuente) para castañas infectadas con fluorescencia verde y castañas sanas.

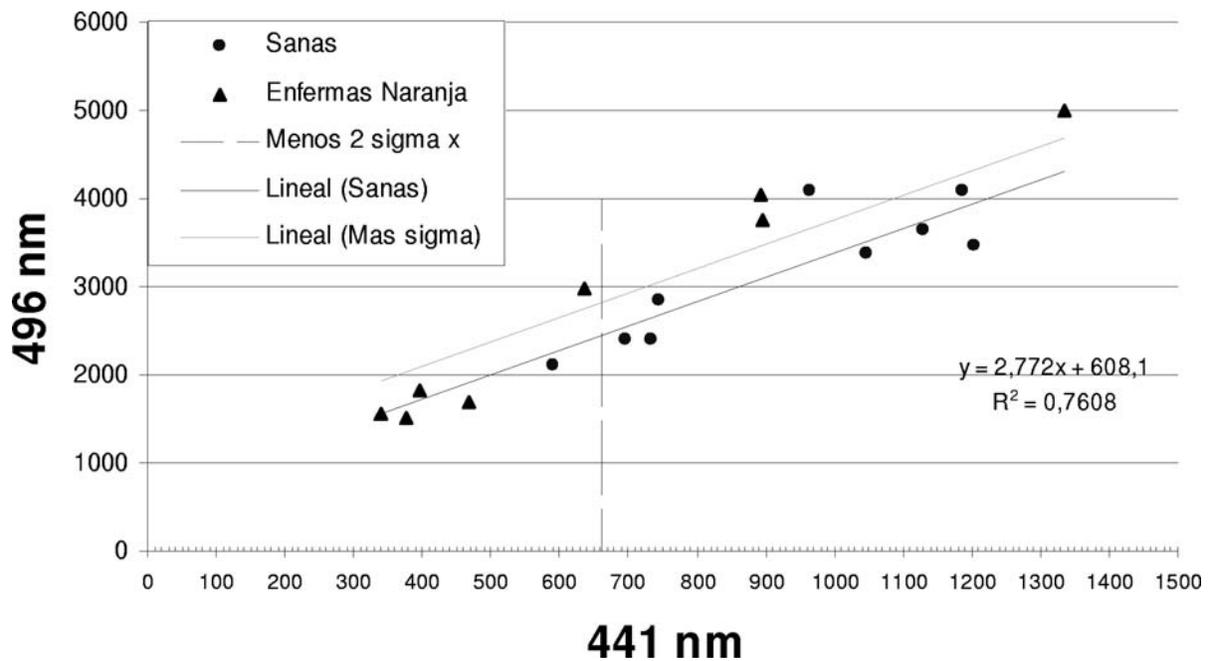


Figura 13. Comparación entre las relaciones de las integrales de los picos de 500nm (fluorescencia) y 443nm (reflejo de la fuente) para castañas infectadas con fluorescencia naranja y castañas sanas.

concluimos que es posible discriminar las enfermas de las sanas estableciendo que todas aquellas cuya relación entre la línea de 441nm y la de 496nm quede fuera del límite marcado por una desviación estándar por encima de la recta de regresión lineal o por debajo de dos desviaciones estándar respecto a la media de las intensidades de la línea de 441nm, pueden considerarse infectadas.

REFERENCIAS

- [1] Ref: www.micotoxinas.com.br/aflatoxina.htm
 [2] PROGRAMA DE NACIONES UNIDAS PARA EL

DESARROLLO (PNUD) Bolivia, Informes; 2004.

Ref: <http://PNUD.bo/Informes/InfRegionales/NorteAmazónico/PANDO-4.PDF>.

- [3] *Determinación de Aflatoxinas en Alimentos de Consumo Infantil*, Santa Cruz Sánchez et.al. Ref: <http://www.ciad.mx/boletin/mar-abr-03/resumen3.pdf>.
 [4] Ref: <http://www.plantpathology.tamu.edu/aflatoxin/detection.htm>
 [5] *Detección de Luz Ultravioleta*, Pedro Miranda et.al., Revista Boliviana de Física No.3, Septiembre 1997.
 [6] *Reporte calibración monocromador*, A. Pecka., No publicado.

EL GEODÍNAMO EN UN ESQUEMA DE RELAJAMIENTO

V. M. Peñafiel¹

Carrera de Física, FCPN (UMSA)
La Paz, Bolivia

RESUMEN

Se investiga la posibilidad de resolver las ecuaciones del geodínamo (sin términos inerciales) mediante un método de relajamiento apropiado para sistemas de computación de un sólo procesador y memoria limitada. Se muestra que un esquema aproximado es posible y que exhibe todavía las características principales del campo magnético y de la velocidad de flujo producidos, no obstante las limitaciones en los grosores de red.

1. INTRODUCCIÓN

Las enormes capacidades de procesamiento (especialmente la configuración arracimada de procesadores) disponibles en la actualidad, hace posible el planteo y solución de problemas con creciente sofisticación. Uno de ellos es el conjunto de ecuaciones de la magnetohidrodinámica que describen la generación de campo magnético terrestre a partir de corrientes conductoras en su núcleo externo, modelo matemático conocido como *geodínamo*. Los notables avances que comenzaron a mediados de la década anterior son ya bastante conocidos y consisten principalmente en la separación vectorial de componentes axisimétricas y anaxisimétricas seguida de una descomposición espectral de todas las variables involucradas [1] [2]. O bien, seguida de la aplicación masiva del Método de Elementos Finitos sobre redes de cálculo con grano bastante fino [3].

Ambas aproximaciones requieren capacidades de cómputo y almacenamiento realmente grandes y no es el objetivo aquí el intentar un esquema alternativo. Más bien, se trata de realizar un sondeo y una primera prueba para determinar si las características principales del modelo pueden ser investigadas en forma aproximada mediante equipos con capacidad de procesamiento estándar.

Como es obvio, la estrategia consistirá en retener los términos más relevantes adoptando el modelo más simple pero aún suficientemente completo. Así, si se toma un número de Rossby pequeño, los términos inerciales pueden ser ignorados en comparación con los de Coriolis; también, la inercia del núcleo interno es ignorable y su rotación puede ser igualada con la del manto; finalmente, se adopta la muy frecuente aproximación de Boussinesq para los factores de empuje. Las nueve ecuaciones vectoriales resultantes, una vez desarrolladas en todas sus componentes deben ser discretizadas usando un esquema de diferencias finitas para las ocho cantidades tensoriales Vr_{ijkl} , $V\phi_{ijkl}$,

Vz_{ijkl} , Br_{ijkl} , $B\phi_{ijkl}$, Bz_{ijkl} , P_{ijkl} y T_{ijkl} (las tres componentes de la velocidad, las del campo magnético, la presión y la temperatura, respectivamente) y los valores previos y subsiguientes de los subíndices (63 entidades en total). El proceso de relajamiento consistirá, pues, en calcular los residuos Re_{nijkl} ($n = 0, \dots, 8$) y "relajarlos" modificando, consecuentemente, los valores de las variables tensoriales anteriores.

2. ECUACIONES DEL GEODÍNAMO

Con las aproximaciones mencionadas en la introducción, para un sistema de referencia rotatorio con velocidad angular $\omega \hat{\mathbf{k}}$, se obtiene las siguientes ecuaciones adimensionales [4]:

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} = -\nabla P + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + E \nabla^2 \mathbf{v} + q R_a \text{Tr} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q \nabla^2 T - \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Donde la unidad de longitud es $l_0 = r_e - r_i \approx 2400$ [km] (la diferencia entre los radios del núcleo externo e interno respectivamente) siendo $r_e/r_i \approx 3$. La unidad de tiempo resulta $t_0 = l_0^2/\eta \approx 60000$ [años] y la unidad de campo magnético deviene $(2\omega\mu\rho_0\eta)^{1/2} \approx 2,2$ [mT].

Entonces, los parámetros adimensionales remanentes, los números de Ekman, Roberts y Rayleigh, que aparecen en las ecuaciones anteriores son:

$$E = \frac{\nu}{2\omega l_0^2}; \quad q = \frac{\kappa}{\eta}; \quad R_a = \frac{g\alpha\beta l_0^2}{2\omega\kappa}. \quad (5)$$

Siendo η la difusividad magnética, ν el coeficiente de viscosidad cinemática, κ la difusividad térmica, α

¹Email: vmiguel@fiumsa.edu.bo

el coeficiente de expansión volumétrica y βl_0 la unidad de temperatura; g es, claro, la aceleración gravitatoria. En los hechos, sin embargo, son los valores de los parámetros (5) y no aquellos de los coeficientes individuales los que determinan la naturaleza de las soluciones.

A fin de hacer posible la solución numérica, es necesario escribir las ecuaciones (1-4) en forma completamente desarrollada. Usando las ecs. (4) en (2) se tiene:

$$E \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] + v_\phi + B_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - B_\phi \frac{\partial B_\phi}{\partial r} - B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{B_\phi^2}{r} + qR_a T r - \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

$$E \left[\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] - v_r + B_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + B_z \frac{\partial B_\phi}{\partial z} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} + \frac{B_r B_\phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad (7)$$

$$E \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + B_r \frac{\partial B_z}{\partial r} - B_r \frac{\partial B_r}{\partial z} - B_\phi \frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{B_\phi^2}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} + qR_a T z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi B_\phi}{r} + B_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{B_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + B_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - v_r \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - v_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_r}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 B_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial r} - \frac{B_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} + B_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{B_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + B_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} - v_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} - v_z \frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{B_\phi v_r}{r} - \frac{2v_\phi B_r}{r} - \frac{\partial B_\phi}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + B_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{B_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + B_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_r \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - v_z \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

$$q \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] - v_r \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} - v_z \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{B_r}{r} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (14)$$

Para un modelo sin resbalamiento, $\mathbf{v} = 0$ en las interfaces del núcleo interno con el externo y del núcleo externo con el manto y la temperatura en el borde del núcleo interno es $T = 0,5$.

3. CÁLCULO NUMÉRICO

El modelo descrito por las ecuaciones (6-14) permite, en principio, experimentar tanto con diferentes configuraciones iniciales cuanto con diferentes valores para los parámetros adimensionales. Por otra parte, el método de cómputo numérico, esencialmente basado en diferencias finitas, puede ser ejecutado usando diversos esquemas de relajamiento. Sin embargo, no es posible determinar de antemano un montaje que pueda ser considerado óptimo para el problema. La no linealidad de las ecuaciones implica que ciertas configuraciones iniciales conducen a una rápida divergencia de los valores sucesivos en algunas de las variables y a una consecuente interrupción de las rutinas. El procedimiento general consiste en la digitalización de las ecuaciones (6-14) según:

$$Re_{0ijkl} = E[(Vr_{i+1jkl} + Vr_{i-1jkl} - 2Vr_{ijkl})/a^2 + (Vr_{ij+1kl} + Vr_{ij-1kl} - 2Vr_{ijkl})/(br_i)^2 + (Vr_{ijk+1l} + Vr_{ijk-1l} - 2Vr_{ijkl})/e^2 + (Vr_{i+1jkl} - Vr_{i-1jkl})/2ar_i - Vr_{ijkl}/r_i^2 - (Vo_{ij+1kl} - Vo_{ij-1kl})/br_i^2] + Vo_{ijkl} + Bo_{ijkl}(Br_{ij+1kl} - Br_{ij-1kl})/2br_i + Bz_{ijkl}(Br_{ijk+1l} - Br_{ijk-1l})/2e - Bo_{ijkl}(Bo_{i+1jkl} - Bo_{i-1jkl})/2a - Bz_{ijkl}(Bz_{ijk+1l} - Bz_{ijk-1l})/2e - Bo_{ijkl}Bo_{ijkl}/r_i + qRaT_{ijkl}r_i - (P_{i+1jkl} - P_{i-1jkl})/2a \quad (15)$$

$$Re_{1ijkl} = E[(Vo_{i+1jkl} + Vo_{i-1jkl} - 2Vo_{ijkl})/a^2 + (Vo_{ij+1kl} + Vo_{ij-1kl} - 2Vo_{ijkl})/(br_i)^2 + (Vo_{ijk+1l} + Vo_{ijk-1l} - 2Vo_{ijkl})/e^2 + (Vo_{i+1jkl} - Vo_{i-1jkl})/2ar_i - Vo_{ijkl}/r_i^2 + (Vr_{ij+1kl} - Vr_{ij-1kl})/br_i^2] - Vr_{ijkl} + Br_{ijkl}(Bo_{i+1jkl} - Bo_{i-1jkl})/2a + Bz_{ijkl}(Bo_{ijk+1l} - Bo_{ijk-1l})/2e - Br_{ijkl}(Br_{ij+1kl} - Br_{ij-1kl})/2br_i - Bz_{ijkl}(Bz_{ij+1kl} - Bz_{ij-1kl})/2b - Br_{ijkl}Bo_{ijkl}/r_i + (P_{ij+1kl} - P_{ij-1kl})/2br_i \quad (16)$$

$$Re_{2ijkl} = E[(Vz_{i+1jkl} + Vz_{i-1jkl} - 2Vz_{ijkl})/a^2 + (Vz_{ij+1kl} + Vz_{ij-1kl} - 2Vz_{ijkl})/(br_i)^2 + (Vz_{ijk+1l} + Vz_{ijk-1l} - 2Vz_{ijkl})/e^2 + (Vz_{ijk+1l} - Vz_{ijk-1l})/2er_i] + Br_{ijkl}(Bz_{i+1jkl} - Bz_{i-1jkl})/2a + Bo_{ijkl}(Bz_{ij+1kl} - Bz_{ij-1kl})/2br_i - Br_{ijkl}(Br_{ijk+1l} - Br_{ijk-1l})/2e - Bo_{ijkl}(Bo_{ijk+1l} - Bo_{ijk-1l})/2e + qRaT_{ijkl}z_k - (P_{ijk+1l} - P_{ijk-1l})/2e \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 Re_{3ijkl} = & \\
 & (Br_{i+1jkl} + Br_{i-1jkl} - 2Br_{ijkl})/a^2 + \\
 & (Br_{ij+1kl} + Br_{ij-1kl} - 2Br_{ijkl})/(br_i)^2 + \\
 & (Br_{ijk+1l} + Br_{ijk-1l} - 2Br_{ijkl})/e^2 + \\
 & (Br_{i+1jkl} - Br_{i-1jkl})/2ar_i - \\
 & Br_{ijkl}/r_i^2 - (Bo_{ij+1kl} - Bo_{ij-1kl})/br_i^2 + \\
 & Bo_{ijkl}Vo_{ijkl}/r_i + \\
 & Br_{ijkl}(Vr_{i+1jkl} - Vr_{i-1jkl})/2a + \\
 & Bo_{ijkl}(Vr_{ij+1kl} - Vr_{ij-1kl})/2br_i + \\
 & Bz_{ijkl}(Vr_{ijk+1l} - Vr_{ijk-1l})/2e - \\
 & Vr_{ijkl}(Br_{i+1jkl} - Br_{i-1jkl})/2a - \\
 & Bz_{ijkl}(Bz_{ijk+1l} - Bz_{ijk-1l})/2e - \\
 & Vo_{ijkl}(Br_{ij+1kl} - Br_{ij-1kl})/2br_i - \\
 & Vz_{ijkl}(Br_{ijk+1l} - Br_{ijk-1l})/2e - \\
 & (Br_{ijkl+1} - Br_{ijkl-1})/2t
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 Re_{4ijkl} = & \\
 & (Bo_{i+1jkl} + Bo_{i-1jkl} - 2Bo_{ijkl})/a^2 + \\
 & (Bo_{ij+1kl} + Bo_{ij-1kl} - 2Bo_{ijkl})/(br_i)^2 + \\
 & (Bo_{ijk+1l} + Bo_{ijk-1l} - 2Bo_{ijkl})/e^2 + \\
 & (Bo_{i+1jkl} - Bo_{i-1jkl})/2ar_i - Bo_{ijkl}/r_i^2 + \\
 & (Br_{ij+1kl} - Br_{ij-1kl})/br_i^2 - \\
 & Br_{ijkl}Vo_{ijkl}/r_i + \\
 & Br_{ijkl}(Vo_{ij+1kl} - Vo_{ij-1kl})/2b + \\
 & Bo_{ijkl}(Vo_{ij+1kl} - Vo_{ij-1kl})/2br_i + \\
 & Bz_{ijkl}(Vo_{ijk+1l} - Vo_{ijk-1l})/2e - \\
 & Vr_{ijkl}(Bo_{i+1jkl} - Bo_{i-1jkl})/2a - \\
 & Vz_{ijkl}(Bo_{ij+1kl} - Bo_{ij-1kl})/2e - \\
 & Vo_{ijkl}(Bo_{ij+1kl} - Bo_{ij-1kl})/2br_i + \\
 & Vz_{ijkl}(Br_{ijk+1l} - Br_{ijk-1l})/2e + \\
 & Bo_{ijkl}Vr_{ijkl}/r_i - Br_{ijkl}Vo_{ijkl}/r_i - \\
 & (Bo_{ijkl+1} - Bo_{ijkl-1})/2t
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 Re_{5ijkl} = & \\
 & (Bz_{i+1jkl} + Bz_{i-1jkl} - 2Bz_{ijkl})/a^2 + \\
 & (Bz_{ij+1kl} + Bz_{ij-1kl} - 2Bz_{ijkl})/(br_i)^2 + \\
 & (Bz_{ijk+1l} + Bz_{ijk-1l} - 2Bz_{ijkl})/e^2 + \\
 & (Bz_{i+1jkl} - Bz_{i-1jkl})/2ar_i + \\
 & Br_{ijkl}(Vz_{i+1jkl} - Vz_{i-1jkl})/2a + \\
 & Bo_{ijkl}(Vz_{ij+1kl} - Vz_{ij-1kl})/2br_i + \\
 & Bz_{ijkl}(Vz_{ijk+1l} - Vz_{ijk-1l})/2e - \\
 & Vr_{ijkl}(Bz_{i+1jkl} - Bz_{i-1jkl})/2a - \\
 & Vo_{ijkl}(Bz_{ij+1kl} - Bz_{ij-1kl})/2br_i - \\
 & Vz_{ijkl}(Bz_{ijk+1l} - Bz_{ijk-1l})/2e - \\
 & (Bz_{ijkl+1} - Bz_{ijkl-1})/2t
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 Re_{6ijkl} = & \\
 & q[(T_{i+1jkl} + T_{i-1jkl} - 2T_{ijkl})/a^2 + \\
 & (T_{ij+1kl} + T_{ij-1kl} - 2T_{ijkl})/(br_i)^2 + \\
 & (T_{ijk+1l} + T_{ijk-1l} - 2T_{ijkl})/e^2 + \\
 & (T_{i+1jkl} - T_{i-1jkl})/2ar_i] - \\
 & Vr_{ijkl}(T_{i+1jkl} - T_{i-1jkl})/2a - \\
 & Vo_{ijkl}(T_{ij+1kl} - T_{ij-1kl})/2br_i - \\
 & Vz_{ijkl}(T_{ijk+1l} - T_{ijk-1l})/2e - \\
 & (T_{ijkl+1} - T_{ijkl-1})/2t
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 Re_{7ijkl} = & \\
 & (Br_{i+1jkl} - Br_{i-1jkl})/2a + \\
 & (Bo_{ij+1kl} - Bo_{ij-1kl})/2br_i + \\
 & (Bz_{ijk+1l} - Bz_{ijk-1l})/2e + \\
 & Br_{ijkl}/r_i
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 Re_{8ijkl} = & \\
 & (Vr_{i+1jkl} - Vr_{i-1jkl})/2a + \\
 & (Vo_{ij+1kl} - Vo_{ij-1kl})/2br_i + \\
 & (Vz_{ijk+1l} - Vz_{ijk-1l})/2e + \\
 & Vr_{ijkl}/r_i
 \end{aligned} \tag{23}$$

donde los residuos Re_{nijkl} son iterativamente recalculados luego de que las variables son modificadas, por ejemplo, mediante el esquema de relajamiento

$$\begin{aligned}
 & Vr_{ijkl} - Re_{8ijkl}r_i \\
 & Br_{ijkl} + Re_{7ijkl}r_i \\
 & Vo_{ijkl} + Re_{1ijkl}/2E(1/a^2 + 1/(br_i)^2 + 1/e^2 + 1/r_i^2) \\
 & Vz_{ijkl} + Re_{2ijkl}/2E(1/a^2 + 1/(br_i)^2 + 1/e^2) \\
 & Bo_{ijkl} + Re_{4ijkl}/(2E(1/a^2 + 1/(br_i)^2 + 1e^2 + 1/r_i^2)) \\
 & Bz_{ijkl} + Re_{5ijkl}/(2E(1/a^2 + 1/(br_i)^2 + 1/e^2)) \\
 & T_{ijkl} + Re_{6ijkl}/2E(1/a^2 + 1/(br_i)^2 + 1/e^2) \\
 & P_{ijkl} + 2aRe_{0ijkl}
 \end{aligned} \tag{24}$$

hasta que la suma

$$err = \sum_1^8 \sum_1^I \sum_1^J \sum_1^K \sum_1^L Re_{nijkl} \tag{25}$$

sea inferior a algún valor previamente especificado (I, J, K y L son, claro, los valores máximos de los respectivos índices y Br, Bo, Bz , etc., son las versiones “ascii” de B_r, B_ϕ, B_z , etc.). El procedimiento es, por supuesto, muy lento e inestable (y ciertamente muy sensible a las capacidades de procesamiento y almacenamiento disponibles), pero, por lo mismo, es de esperar que puede ser fácilmente adaptado para el procesamiento paralelo o en racimos.

4. RESULTADOS

Es posible que un mejor esquema de relajamiento pueda proporcionar una convergencia mas segura y rápida para configuraciones iniciales razonablemente elegidas. Para el que se describe en la sección anterior, el procesamiento consiste en la búsqueda de una combinación afortunada de valores de los parámetros, de montajes iniciales y del intervalo mínimo de convergencia -dado por la magnitud del error (25)- que, en una serie continua de iteraciones proporcione los registros finales para todas las variables.

Para el caso que nos ocupa, se encuentra una serie convergente con valores iniciales muy bajos tanto para el campo cuanto para las velocidades y las cantidades

$$E = 6 \times 10^{-3}; \quad q = 10; \quad R_a = 100, \quad (26)$$

todavía dentro de los intervalos aceptables para el problema pero casi "de compromiso", especialmente el de R_a notoriamente bajo (el valor realista, todavía no alcanzado por los métodos empleados hasta el presente, es $\approx 10^{30}$). Con un error de 10 en (14), el tiempo de convergencia aunque grande es aún permisible (al margen del tiempo empleado en ensayos y ajustes, la convergencia completa para cada conjunto de valores iniciales "exitosos" tuvo un promedio de alrededor de 3 horas sin diferencias importantes entre las pentium III, 330 MHz y pentium IV, 1.4 GHz en entorno de consola DOS extendido).

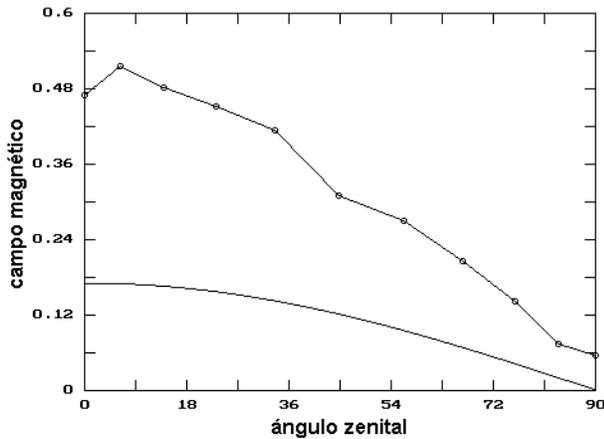


Figura 1. Campo magnético radial en $r = r_e$ comparado con el del dipolo terrestre en el borde inferior del manto ($t=3$).

Los resultados de los registros se pueden resumir como sigue: el procedimiento de cálculo (a precisión simple, esto es, con números reales de 64 bites) se efectúa transformando primero el retículo en la región $\{0,5 \leq r \leq 1,5; 0 \leq \theta \leq \pi/2; 0 \leq \phi \leq \pi\}$ a coordenadas cilíndricas sobre las cuales se ejecuta el esquema (15-24); de los registros resultantes (que, en nuestro caso contienen $10 \times 12 \times 12 \times 10 = 14400$

valores para cada una de las variables, se extrae la información contenida en los gráficos de las figuras 1, 2 y 3.

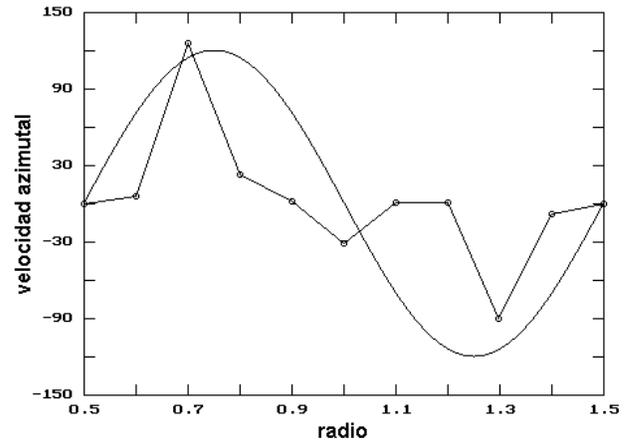


Figura 2. Velocidad azimutal en el plano ecuatorial en $\phi = 45$ comparado con el perfil de un vórtice ideal.

En la Fig. 1. se aprecia los valores de la componente radial del campo magnético en la interfaz del núcleo externo con el manto (el cual debe empalmarse eventualmente con el campo externo al núcleo). Claramente, hay un sobredimensionamiento respecto de la magnitud aceptada para el campo dipolar terrestre en la misma zona.

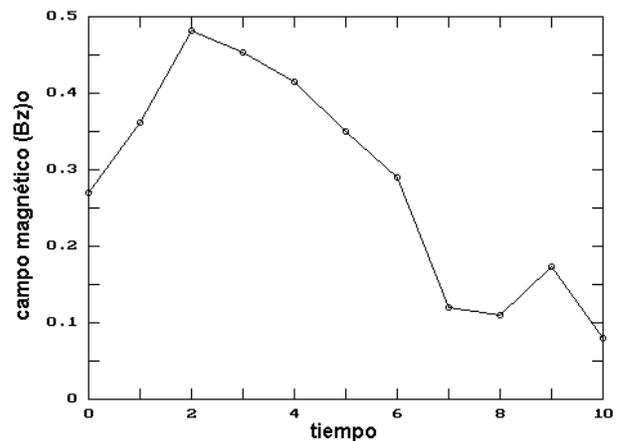


Figura 3. Comportamiento temporal de la componente z del campo magnético en $r = 0$.

El propósito de la Fig. 2. es el de mostrar que el flujo en el interior del cascarón $[r_i, r_e]$ es turbulento; no es definitivo el que la oscilación de valores de la velocidad azimutal describa un vórtice, pero, evidentemente, hay una razonable aproximación.

Finalmente, la tendencia temporal de la componente z del campo magnético parece más bien decepcionante pues se esperaría al menos una inversión dipolar en el

intervalo de $t = 10 \times 60000 = 6 \times 10^5$ años. La apariencia errática de $(B_z)_0$ es probablemente el peor efecto del cálculo sobre una red de grano tan grueso (al menos 400 veces mayor que el de los casos en los cuales este valor es reportado, v.g., [3]).

5. CONCLUSIONES

No se pretende que el método usado sea el más idóneo para los propósitos mencionados en la introducción, pero al menos estos resultados preliminares parecen alentadores. Quizá una más detallada investigación hacia esquemas de relajamiento más eficientes y - en consecuencia- la elaboración de código optimizado, podría llevar a un modelo funcional "de escritorio": uno que permita experimentar exitosamente con valores diferentes de los parámetros E, q y R_a , por ejemplo, con diferentes condiciones iniciales y -sobre todo- con retículos más finos.

Lo hecho en el presente trabajo parece reflejar muy notoriamente las limitaciones de la capacidad de

cómputo aún disponibles para un problema de gran complejidad como es el del geodínamo. De todos modos, exepctuando la evolución temporal del campo magnético, el resto de las características principales del fenómeno descrito están efectivamente presentes en los resultados obtenidos.

REFERENCIAS

- [1] Glatzmaier G. A. and Roberts P. H., "A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle" Phys. Earth Planet. Inter., **91**, 63-75, 1995.
- [2] Kida S. and Kitauchi H., "Thermally Driven MHD Dynamo in a Rotating Spherical Shell" Prog. Theor. Phys. Suppl. **130**, 121-136, 1998.
- [3] Matsui H., "MHD Dynamo Simulation Using GeofEM Platform" DCES (RIST) Tokio University preprint (2002).
- [4] Jones C. A., Longbottom A. W. and Hollerbach R., "A Self-consistent Convection Driven Geodynamo model, Using Mean Field Approximation" Phys. Earth Planet. Inter., **92**, 119-141, 1995.

TRF SOBRE DATOS POSTMUESTRADOS

V. M. Peñafiel¹

Carrera de Física, FCPN (UMSA)
La Paz, Bolivia

RESUMEN

Se exhibe y revisa tres principales contaminantes del espectro de potencias correspondiente a datos experimentales cuyos registros fueron obtenidos previamente y sin el propósito específico de ser analizados via la transformada digital de Fourier. Para este tipo de registros, algunas técnicas analíticas del procesamiento de señales digitales (PSD) están todavía disponibles; sin embargo, los principales filtros contra el ruido y la tergiversación (“aliasing”) ya no pueden ser aplicados. Se hace énfasis, por tanto, en el tratamiento de tales problemas, especialmente en el de la detección de frecuencias espurias (alias), imposible para el PSD cuando se desconoce si la señal digital ha sido correctamente muestreada. Se prueba que el empleo de un método ajeno a las operaciones relacionadas con la transformada rápida de Fourier (TRF), como auxiliar analítico, permite descubrir las tergiversaciones conspicuas.

1. INTRODUCCIÓN

Las sofisticadas y poderosas técnicas del Procesamiento de Señales Digitales están principalmente orientadas a producir registros limpios de ruidos y efectos contaminantes aún antes de un análisis de señal propiamente dicho [1] [2] [3]. El empleo extendido de filtros a nivel de muestreo, traducidos directamente en circuitos electrónicos digitalizadores, veloces y eficientes, llevan a la práctica el “prevenir antes que lamentar” en materia de análisis armónico; y las aplicaciones están ampliamente extendidas a nivel comercial, industrial y científico en gran diversidad de áreas particulares [1]. También en Física, por supuesto, el empleo de analizadores digitales en la obtención de datos apropiados para el estudio de fenómenos periódicos armónicos o anarmónicos es común y hasta rutinario en ciertos campos.

Desafortunadamente, un buen conjunto de problemas relativos al tratamiento de datos experimentales tiene que ver con registros cuyos procedimientos de medición no estaban diseñados para el PSD, no eran apropiados para ello, no constituyen digitalización de fenómenos analógicos o simplemente provienen de procedimientos de medición parcial o totalmente desconocidos. En general, tales registros se presentan al análisis solamente para obtener información adicional a cerca de periodicidades posibles o esperadas o a cerca de tendencias espectrales con implicaciones posteriores.

Por tanto, estas series temporales o espaciales se hallan impregnadas de ruidos indeterminados, frecuencias espurias y otros contaminantes para los cuales el PSD puede no rendir una clara resolución. De todos modos, un análisis de datos postmuestreados debe ser

capaz de reducir significativamente el efecto de esas interferencias antes de la extracción de conclusiones. En este trabajo se considera tres de los efectos más recurrentes: el ruido aleatorio (blanco) el ruido $1/f$ (rosado) y la tergiversación (*aliasing*) de señales de alta frecuencia (Fig. 1.).

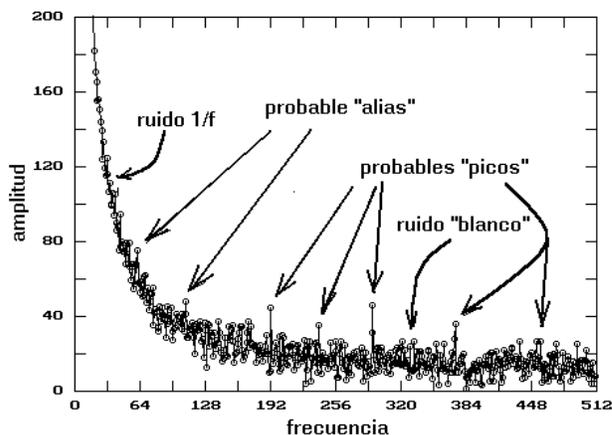


Figura 1. Espectro de amplitudes correspondiente a un típico registro de datos postmuestreados.

En una serie de datos postmuestreados, (i) el nivel de ruido y (ii) el intervalo de muestreo (Δt ó Δx) son características dadas e irrevisables, de modo que la sugerencia de “emplear intervalos de muestreo y filtros más adecuados” no es aceptable. El análisis se orienta a obtener la mayor información posible con los datos caracterizados de esa manera o decidir si el registro es francamente inservible para propósitos de tratamiento de señal. Por otra parte, aunque usualmente el procesamiento de datos desde el punto de vista del análisis armónico es por sí mismo un tema amplio

¹Email: vmiguel@fiumsa.edu.bo

y lleno de sutiles detalles, que requiere -a veces- el desarrollo de métodos específicos a un tipo particular de registro, en términos generales lo que se busca es la *detección* de determinadas periodicidades ("picos") y, eventualmente, la medición de de sus frecuencias dentro del margen de error permitido por los datos; menos frecuente y necesaria es la determinación de amplitudes y diferencias de fase. Otras propiedades que el espectro de potencias o de amplitudes puede revelar, como la presencia de fenómenos caóticos, son menos susceptibles al tratamiento cuantitativo, por lo cual no ocupará nuestra atención.

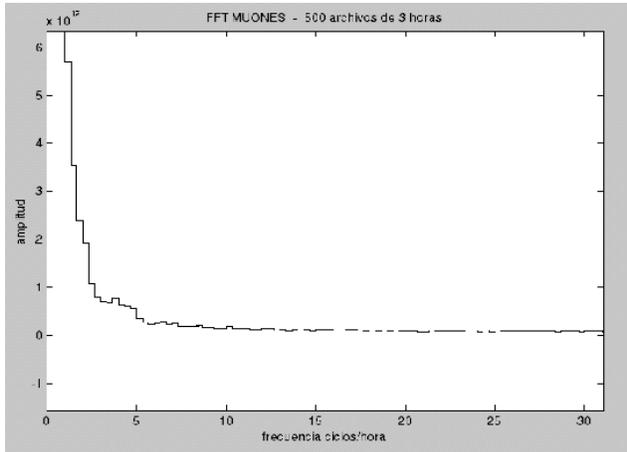


Figura 2. Primeras 32 amplitudes de un espectro para 10800 eventos de rayos cósmicos por hora (con ruido rosado).

2. RUIDOS BLANCOS Y ROSADOS

Los más perjudiciales contaminantes en un registro experimental son las fluctuaciones aleatorias con energía distribuida sobre todo el espectro, el ruido blanco", y otro, cuyo origen no está muy claramente explicado, cuya amplitud aumenta en las bajas frecuencias según $1/f$ y que se conoce como ruido rosado"[1].

De este último hay muy poco que decir cuando es inherente al proceso de medición o al fenómeno estudiado; en ocasiones, sin embargo, cierto tipo de ruido rosado se filtra en la rutina de cómputo cuando ésta usa iterativamente ciertas posiciones de memoria -principalmente para economizarla- sin una previa limpieza. Cuando los registros de datos son muy grandes, es muy recomendable calibrar el programa de cálculo con una base de datos iguales a una constante y del mismo tamaño que el registro experimental para verificar su correcto comportamiento a bajas frecuencias y, claro, es más recomendable aún el uso de rutinas con código fuente conocido. Por ejemplo, el espectro de amplitudes de la figura 2., obtenido mediante un programa cerrado"[6], muestra un claro decaimiento del tipo $1/f^n$; sin embargo, el mismo registro de 10800 datos procesado con una rutina calibrada revela que tal decaimiento es inexistente (Fig. 3.). El valor elevado

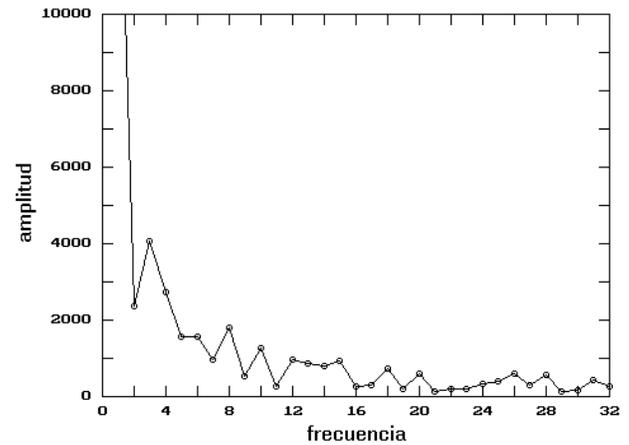


Figura 3. Espectro de amplitudes correspondiente al mismo registro empleado para la Fig. 2. (sin ruido rosado).

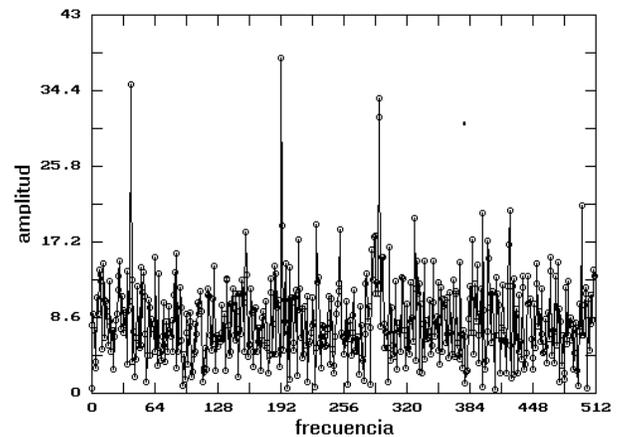


Figura 4. Espectro de amplitudes correspondiente al mismo registro empleado para la Fig. 1. (sin ruido rosado).

en el origen puede reducirse a uno pequeño o cero restando una constante (v.g., el promedio del registro) a la base de datos original. El mismo procedimiento, aplicado a los datos usados para obtener el espectro de la figura 1., rinde el de la figura 4., donde parte del ruido contaminante aledaño a los "picos" interesantes ha desaparecido también.

En muchos casos, existe ruido desigualmente distribuido sobre el intervalo de frecuencias; o ruido con marcadas fluctuaciones de amplitud, con máximos que pueden llegar a ser confundidos con picos de señal. No todas las interferencias aleatorias constituyen, pues, ruido blanco". En cualquier caso, todo tipo de ruido es perjudicial para el análisis cuando sus niveles de amplitud (o potencia) son lo suficientemente altos como para eclipsar información útil.

En efecto, aunque en principio es posible reducir el efecto del ruido aleatorio, como es usual en el PSD, fraccionando el registro total -si es bastante grande- en segmentos más cortos, efectuar sobre ellos la TRF y luego

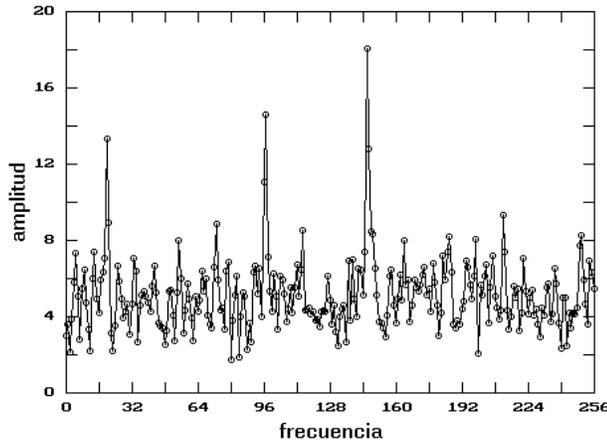


Figura 5. Fraccionamiento en 3 segmentos filtrados para los datos correspondientes al espectro de la Fig. 4.

promediar los espectros resultantes, la limitación a tal procedimiento la da el teorema de Parseval:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |F_k|^2 \quad (1)$$

(la potencia de la serie de datos se distribuye sobre todas las frecuencias admitidas, independientemente de si constituyen señal o ruido). El fraccionamiento de la serie debilita los picos de señal porque la potencia total también se fracciona. Así, mientras el espectro de la Fig. 3., cuando su serie de datos ha sido fraccionada en tres segmentos, muestra una reducción aceptable en las amplitudes ruidosas (y permite eliminar posibles picos al no mantener éstos su posición y tamaño relativos en el espectro) (Fig. 5.), la misma serie, fraccionada en 12 partes, muestra ya un deterioro notable debido a la reducción en las amplitudes de los picos de señal (Fig. 6.).

En consecuencia, se puede lograr una efectiva reducción de ruido aleatorio en aquellas afortunadas ocasiones en las que se dispone de varios registros *independientes* $\{x_i, y_i\}_n$ obtenidos con el mismo procedimiento de medición. El promedio de los espectros de amplitud $\{\langle F_k \rangle\}_n$ dados por la TRF de esos registros proporciona, entonces, una versión más "limpia" del espectro que contiene a los picos de señal interesantes porque la superposición afecta, ahora, a las amplitudes no coincidentes (aleatorias) pero no disminuye la potencia contenida en las componentes periódicas (Fig. 7.).

3. EL PROBLEMA DE LA TERGIVERSACIÓN DE SEÑAL

Si el propósito principal del tratamiento de los datos es la búsqueda de periodicidades significativas, entonces la tergiversación constituye el problema central a resolver pues, en principio, cualquier pico de señal en el espectro para datos postmuestreados es sospechoso de

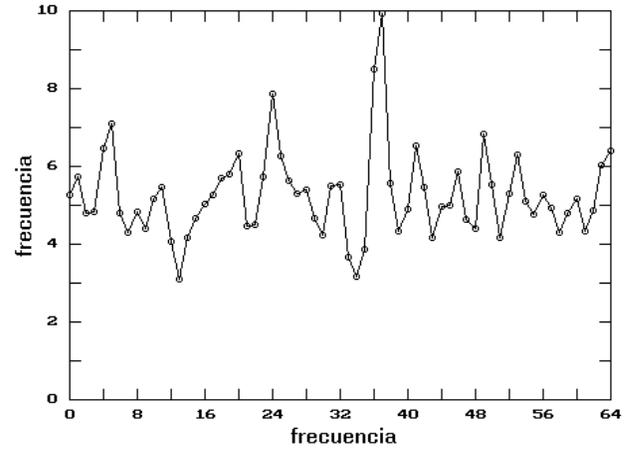


Figura 6. Fraccionamiento en 12 segmentos filtrados (de 128 puntos cada uno) para los datos correspondientes al espectro de la Fig. 4.

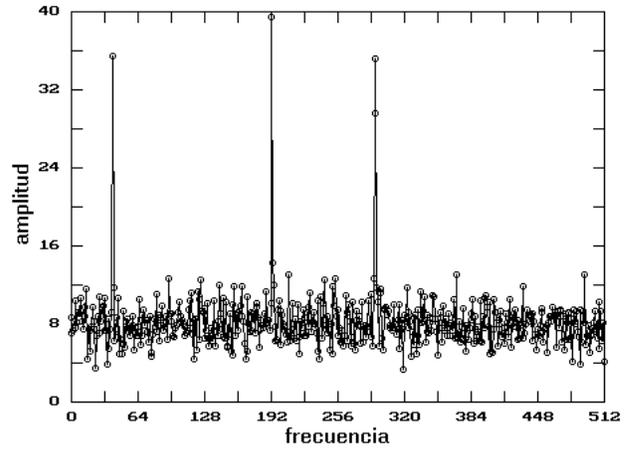


Figura 7. Superposición (promedio) de las TRF para 6 registros independientes sobre el mismo procedimiento experimental de la Fig. 4.

ser un "alias".

Los alias son picos espurios que corresponden a frecuencias altas, digamos ν_a , y que son reflejados sobre una frecuencia baja

$$\nu_b = 2n\nu_0 - \nu_a \quad (2)$$

donde ν_0 es la frecuencia de Nyquist y n algún número entero. La figura 8. ilustra claramente el efecto: una señal de alta frecuencia (período T) es digitalizada con un lapso de muestreo $\Delta t > T$; el resultado es una serie temporal (puntos oscuros) que representa a una señal de baja frecuencia; esta señal -no la original- es la que realmente interviene en el mecanismo de la transformada digital y conduce a un pico falso en el espectro respectivo (Fig. 9.).

Evidentemente, pues, en los hechos la señal de entrada es **sustituida** por otra de menor frecuencia. En el dominio frecuencial del análisis de Fourier, esa

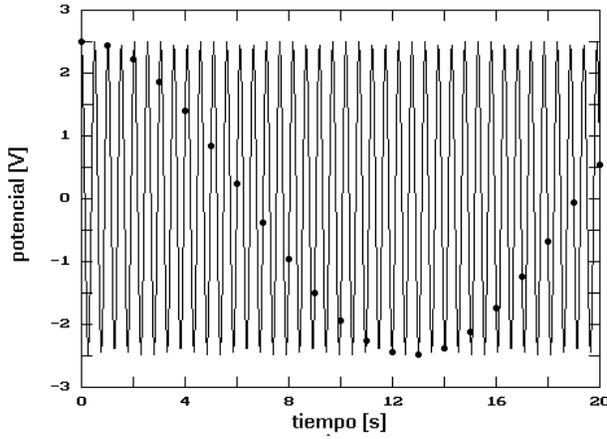


Figura 8. Señal de período $T=0.53$ [s] mostrada cada segundo. La señal digitalizada es la que se corresponde con la serie de círculos llenos (muy obviamente de frecuencia más baja).

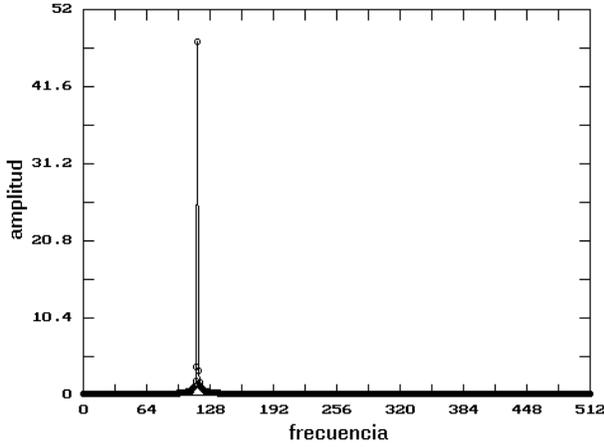


Figura 9. Espectro de amplitud para la señal digitalizada de la Fig. 8. El pico en $\nu = 116$ es un "alias" del que debería aparecer en $\nu = 1932$ para un registro con 1024 datos ($2048 - 1932 = 116$).

señal de entrada es invisible. Un inconveniente adicional de la tergiversación, cuando el proceso de digitalización no ha sido apropiado o se desconoce, es que todo pico de señal es, en principio, sospechoso de ser alias de alguna otra señal "verdadera". El PSD no permite inferir la frecuencia de la señal verdadera pues la ec. (2) admite infinitas soluciones para ν_b y ν_0 dadas.

Existe, sin embargo, un muy antiguo método estadístico de estimación espectral basado sobre la propiedad de interferencia de dos o más trenes de onda y que, por brevedad, lo denominaremos "método Maxvar". El algoritmo asociado es el siguiente [5] [6]:

Suponiendo que los datos tienen la forma general

$$y_i = \sum_{r=1}^k A_r \text{sen}(\omega_r i - \phi_r) \quad (3)$$

con $\omega_r = 2\pi/T_r$ y $\Delta t = 1$ (unidades arbitrarias), los promedios sobre términos como $z_r(i) = A_r \text{sen}(\omega_r i - \phi_r)$ son, estadísticamente,

$$\langle z_r \rangle \propto \int_0^T \text{sen}(\omega_r x - \phi_r) dx = 0$$

cuando las $z_r(i)$ están fuera de fase o, más bien, en las diferentes fases de la función trigonométrica y

$$\langle z_r \rangle = \langle A_r \text{sen}(\theta_r) \rangle = A_r \text{sen}(\theta_r)$$

con $\theta_r = c - \phi_r$ si las cantidades $z_r(i)$ están en fase, esto es, si sus argumentos se relacionan mediante alguna constante c según $\omega_r i \simeq 2\pi + c$.

Esto implica que cuando los datos son ordenados en arreglos de β filas y α columnas y promediados por columnas:

$$\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \dots & y_\alpha \\ y_{\alpha+1} & y_{\alpha+2} & \dots & y_{2\alpha} \\ y_{2\alpha+1} & y_{2\alpha+2} & \dots & y_{3\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{(\beta-1)\alpha+1} & y_{(\beta-1)\alpha+2} & \dots & y_{\beta\alpha} \end{array}$$

$$m_1^\alpha \quad m_2^\alpha \quad \dots \quad m_\alpha^\alpha$$

las medias m_u^α son pequeñas y homogéneas entre sí (cuando los términos de las columnas están fuera de fase) o están dispersas en las diferentes fases de una señal ondulatoria (cuando los términos de cada columna están en fase). Consecuentemente, si se calcula la varianza

$$s_\alpha^2 = \langle (m^\alpha - m_\alpha)^2 \rangle \quad (4)$$

con $m_\alpha \equiv \langle m^\alpha \rangle = \sum_{u=0}^{\alpha} m_u^\alpha$, y la serie de razones

$$\lambda_\alpha = \frac{s_\alpha}{s_y} \quad (5)$$

donde s_y es la desviación típica del registro entero, λ_α debe ser un máximo relativo cuando α marca un período o un múltiplo entero del período T_r en el arreglo con α columnas. Para una señal armónica, es fácil demostrar que $s_\alpha \approx A_\alpha/\sqrt{2}$ y, por tanto, para datos de la forma (3), se debe cumplir la restricción aproximada

$$s_y^2 \approx \sum_{r=1}^k \frac{A_r^2}{2} \Rightarrow \sum_{r=1}^k \lambda_r^2 \approx 1 \quad (6)$$

para las λ que constituyen máximos relativos.

El análisis Maxbar es lento y tedioso, en general, por lo que requiere de ágiles rutinas de cálculo y graficado. Por ejemplo, el diagrama Maxvar para la señal tergiversada de la figura 8., que se muestra en la figura 10., exhibe repetitivamente todos los picos compatibles con la única periodicidad contenida en el registro. Las figuras 11. y 12. contienen el detalle

de las alturas de las λ_α que son relevantes al análisis. No obstante que existen máximos relativos compatibles con la frecuencia $\nu = 116$ proporcionada por la TRF, el hecho de que las alturas de las λ_α para $\alpha = 53, 106, 159$ etc., sean iguales a la unidad es una clara y definitiva indicación de que la frecuencia $\nu = 116$ (correspondiente a un período $T = 8,83$) es un alias. La frecuencia correcta se halla haciendo que la ec. (2) se satisfaga para el período menor a la unidad del cual $T=53$ es múltiplo, esto es, como $1024/53 \approx 1932$ y $2(1024) - 1932 = 116$, deduciríamos que que la frecuencia correcta presente es 1932 y no 116. En muchos casos, el procedimiento es ya útil cuando permite descartar picos del espectro detectados como alias, aún si las frecuencias "verdaderas" no fueran unívocamente ubicables.

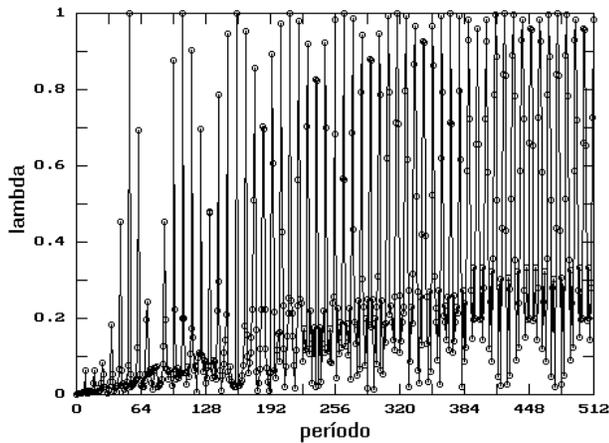


Figura 10. Diagrama Maxvar para la señal digitalizada de la Fig. 8. El pico en $T = 53$, por tener una altura $\lambda = 1$ indica que la única frecuencia presente debe ser compatible con algún múltiplo de ese período.

Así, para los datos considerados en este artículo, cuya TRF, menos afectada de ruidos, se muestra en la figura 7., el procedimiento Maxvar rinde el nutrido diagrama de la figura 13. En la figura 14. aparece el detalle de los primeros 60 puntos. Los picos en $\nu = 193$ y $\nu = 293$ del espectro TRF (Fig. 7) quedan confirmados con los picos en $T = 7, 14, 21, \dots$ (múltiplos de $T = 3,5 \approx 1024/293$) y $T = 53$ (múltiplo de $T = 5,3 \approx 1024/193$), pero el pico en $\nu = 40$ de la TRF debería aparecer bastante bien representado en el Maxvar por ejemplo en $T = 256$ (múltiplo de $T = 25,6 \approx 1024/40$); sin embargo, la figura 15. no muestra un máximo relativo para ese período. La conclusión es que la frecuencia $\nu = 40$ del espectro TRF es un alias.

No es plausible que el método Maxvar pueda ser usado sistemáticamente para un análisis espectral efectivo. Sin embargo, los ejemplos presentados lo hacen un excelente *auxiliar* en la inspección detallada de periodicidades significativas dentro de registros experimentales no necesariamente orientados hacia el procesamiento de señales. Su efectividad, naturalmente,

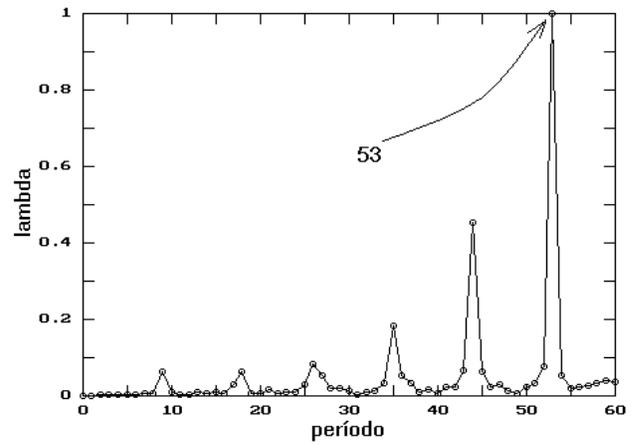


Figura 11. Detalle del diagrama Maxvar de la Fig. 10. mostrando los primeros 60 puntos el pico en $T = 53$ es ahora evidente.

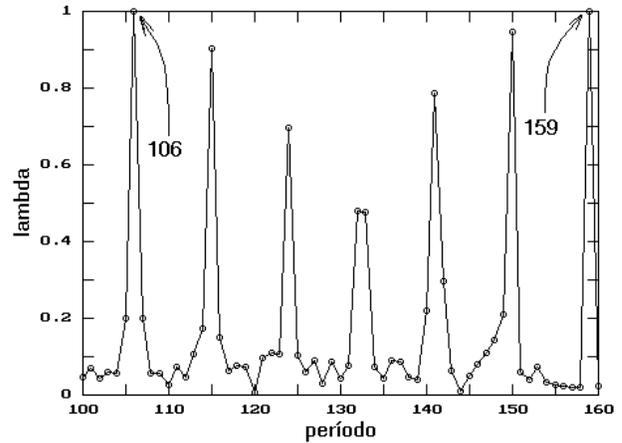


Figura 12. Detalle del diagrama Maxvar de la Fig. 10. con la confirmación de que el único período presente es un submúltiplo de $T = 53$.

está condicionada también a la calidad precisión y tamaño de las series de datos disponibles.

El análisis puede, eventualmente, ser mejorado también con el cauteloso empleo de filtros postmuestales. En buena parte de los casos, principalmente porque el contenido de los datos que nos ocupan es casi siempre desconocido (en términos de propiedades de señal) un filtro de los tipos Hanning, Hamming o Blackman

$$\begin{aligned} w(i) &= \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{2\pi i}{n})] \\ w(i) &= 0,54 - 0,46\cos(\frac{2\pi i}{n}) \\ w(i) &= 0,42 - 0,5\cos(\frac{2\pi i}{n}) + 0,08\cos(\frac{2\pi i}{n}) \end{aligned} \quad (7)$$

($0 \leq i \leq n$) [1] [2] [3] debe ser suficiente cuando ciertos picos se encuentran muy próximos o se sospecha que algunas amplitudes de ruido se deben a filtraciones producidas por efecto de los bordes (tamaño) del registro. Los datos filtrados $y(i) = x(i)w(i)$ admiten todo el análisis precedente y la elección de uno de los

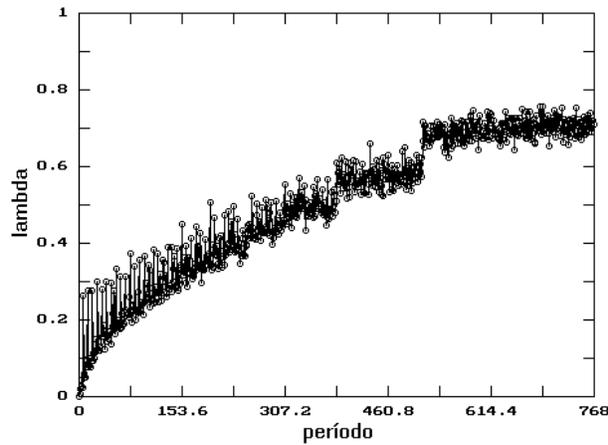


Figura 13. Diagrama Maxvar para el mismo registro usado en las TRF de la Fig. 3.

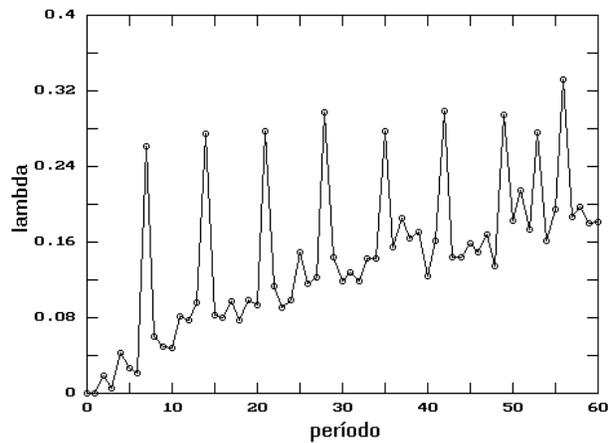


Figura 14. Detalle del diagrama Maxvar de la Fig. 13. Los picos sucesivos en 7, 21, 28, ... y el pico en 53 concuerdan con las frecuencias 293 y 193 de la TRF, respectivamente.

filtros (7) depende enteramente de la bondad de los resultados que se obtengan (ver Figs. 5. y 6.).

4. CONCLUSIONES

Muchos más ejemplos de los que se ha presentado podrían ilustrar con mayor detalle los particulares problemas que se presentan en un análisis espectral sobre datos "crudos" de los cuales se desea extraer información sobre periodicidades significativas. Una gran parte de tales registros postmuestreados han sido obtenidos sin gran preocupación por su posible tratamiento de señal y, por tanto, su digitalización no ha implicado técnicas de filtrado de altas frecuencias, ruido aleatorio o ruido rosado.

Las técnicas asociadas al análisis espectral de Fourier, poderosas y precisas cuando los datos son preparados con ese propósito, pueden rendir resultados imprecisos o ambiguos cuando el muestreo de las mediciones se desconoce. En esos casos, la pertinencia de los equipos de medición ya no es un tema de discusión y el

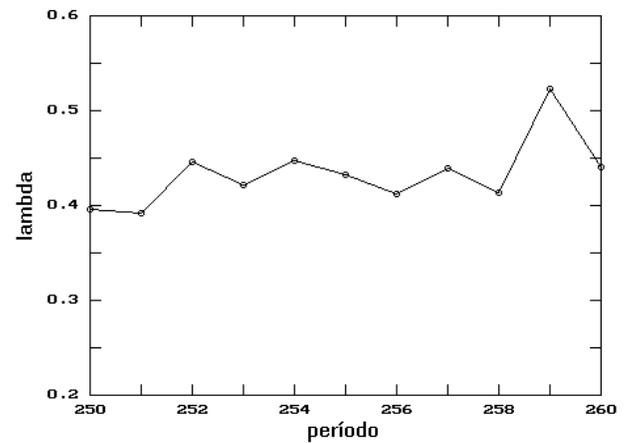


Figura 15. Detalle del Maxvar de la Fig. 13. No existe un máximo relativo en 256 (esperado de acuerdo con la TRF).

análisis debe basarse enteramente sobre procedimientos numéricos apropiados. Entre las técnicas conocidas, generalmente las de atenuación de ruido aleatorio y el empleo de rutinas de cómputo debidamente probadas, incluyendo las de filtrado de señal (ec. (7)) todavía pueden ser usadas con mucho éxito en combinación con la transformada rápida de Fourier.

Sin embargo, el efecto de tergiversación de señal, verdadera o potencialmente implicada en un registro de datos, plantea un problema insoluble para la transformada de Fourier digital; sobre todo porque ésta actúa sobre el dominio actual de frecuencias de la señal digitalizada de entrada; todas las recomendaciones en relación a evitar la presencia de señales con frecuencias superiores a la frecuencia de Nyquist están orientadas precisamente a prevenir las ambigüedades consecuentes. Por tanto, una vez que el muestreo ha tenido lugar, es poco lo que el análisis espectral basado sobre la TRF puede hacer para detectar frecuencias espurias.

Se ha tratado de mostrar, a lo largo de este trabajo, que la combinación de las técnicas de la TRF con el método Maxvar de estimación espectral (ya obsoleto para ese fin) puede lograr, en principio, la detección de periodicidades tergiversadas (alias) en el espectro asociado a registros postmuestreados, permitiendo el aislamiento de periodicidades significativas para un análisis posterior. La importancia de diseñar mecanismos de detección de alias radica, justamente, en garantizar la exactitud de las conclusiones que se desprenden luego del tratamiento espectral, que pueden tener implicaciones fatales al momento de interpretar físicamente el contenido de los registros experimentales que contienen periodicidades interesantes.

El método Maxvar, por su naturaleza estadística y por actuar solamente en el dominio de los períodos de las señales, es ajeno a las propiedades de la TRF y procedimientos asociados. En muchos casos, es muy sensible

inclusive a periodicidades con nivel señal-ruido muy bajo. Además, su programación para el cómputo electrónico es muy simple, como se sigue de la tabulación de datos y las ecs. (3) á (6). El número de posibles arreglos para n datos es, claro, n (de los cuales sólo $n/2$ proporcionan amplitudes significativas) por tanto, las rutinas de cálculo son muy rápidas para registros de tamaño razonable. Y, finalmente, puesto que ha de ser empleado únicamente como un auxiliar en el análisis global, los tediosos procedimientos que su empleo como método de estimación implican, ya no son necesarios.

REFERENCIAS

- [1] Smith S. W., *"The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing"* Cal. Tech. Publishing, San Diego CA. (1999).
- [2] Brigham O. E., *"The Fast Fourier Transform"* Prentice Hall, Englewood (1974).
- [3] Cerna M. and Harvey A. E., *"The Fundamentals of FFT-Based Signal Analysis and Measurement"* Application Note 041, National Instruments Co., 2000.
- [4] Whittaker E. T. and Robinson G., *"Calculus of Observations"* Blackie & Son, London (1924).
- [5] Peñafiel V. M., *"Introducción al Tratamiento de Datos Experimentales"* UMSA, la Paz (1997).
- [6] Velarde A., Comunicación privada.

MODELO PARA GALAXIAS ESPIRALES

Urzagasti D.

*Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz-Bolivia*

RESUMEN

Se presenta un modelo de galaxias espirales obtenido con la resolución de las ecuaciones de fluido normalizadas con la densidad de Hubble y el radio de retorno de capas que se alejan de la expansión homogénea de Hubble. Con esto, el problema se convierte en autosimilar. Se consideran dos componentes: gas colisional y materia no colisional (materia oscura y estrellas), cuya única interacción es la gravitatoria. Para la resolución se realizan ciertas aproximaciones: primero se hallan las soluciones correspondientes a valores grandes de la variable autosimilar y luego se utilizan estas soluciones para linealizar las ecuaciones originales, adoptando, además, condiciones de equilibrio hidrostático en las direcciones distintas a la radial. Se consideran procesos de formación estelar a través de términos de sumidero de masa, momento y energía que son adicionados a las ecuaciones de fluido. Se hallan soluciones para las variables termodinámicas y para el campo de velocidades que reproducen de buena manera la estructura de brazos (se consideran soluciones con dos brazos), la forma de disco y las curvas de rotación de galaxias espirales. El modelo también es aplicable a la representación de la estructura y dinámica de la materia no colisional. En particular, se obtiene la estructura y dinámica de la componente de estrellas formadas. El modelo es confrontado con observaciones. Para ello se realizan ajustes a la estructura de brazos de las galaxias NGC 157 y NGC 5247 y a las curvas de rotación de las galaxias NGC 3198 y NGC 342, obteniendo un buen acuerdo en ambos casos.

1. INTRODUCCIÓN

Existen soluciones para el colapso cosmológico secundario sobre una perturbación sobredensa inicial [1,3]. Ellas corresponden a un colapso esférico de un fluido politrópico que progresivamente se aleja de la expansión homogénea de Hubble. Luego de que una primera capa se aleja de la expansión y comienza a colapsar, otras capas le siguen, alcanzando un radio máximo de expansión, $r_{ta}(t) \propto t^{8/9}$, y colapsando luego hacia la perturbación central. Bertschinger [1] considera un gas colisional (dissipativo) y con simetría esférica que, luego de alejarse de la expansión, es alcanzado por un choque, de manera que el fluido llegue al reposo en el centro de la distribución, evitando así que las capas de masa colapsantes se crucen. También, décadas atrás (Burbidge [9]), se ha considerado la formación de estructuras galácticas con brazos espirales. La forma planteada en este caso consiste de una función armónica cuya fase no sólo es función de la variable angular sino también de la variable radial (distancia al centro galáctico) y del tiempo. En el modelo planteado aquí se presenta un punto de vista alternativo: Además del gas colisional se considera también la presencia de materia no colisional (materia oscura y estrellas); el gas no es alcanzado por un choque, de manera que, luego de alejarse de la expansión, se da el colapso hacia la perturbación central; adicionalmente, la materia está animada de rotación, de forma que, a medida que el

sistema colapsa, el gas adquiere una estructura de brazos espirales que van enrollándose progresivamente; y si se consideran velocidades polares no despreciables (el eje de rotación define los polos galácticos) el sistema se condensa hacia el plano de simetría dando una estructura de disco.

2. MODELO

2.1. Ecuaciones de partida

Se considera un fluido con interacción gravitatoria, cuyo comportamiento está descrito por las ecuaciones de continuidad, de Euler y del flujo de energía, las cuales, respectivamente, son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{g}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0,$$

donde ρ es la densidad, \vec{v} es la velocidad, p es la presión, γ es el índice politrópico y \vec{g} es la aceleración gravitatoria.

La aceleración gravitatoria tiene la siguiente expresión:

$$\vec{g} = G\vec{\nabla} \int \frac{\rho_T(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}', \quad (2)$$

$$\rho_T = \rho + \rho_{NC}.$$

Aquí ρ_T es la densidad total de materia: incluye la densidad del gas colisional, ρ , y la densidad de la materia no colisional ρ_{NC} .

En el caso de la materia no colisional debe considerarse una presión nula en las anteriores ecuaciones.

2.2. Normalización

Para la normalización de las variables dependientes e independientes se usan la densidad de Einstein-De Sitter [2],

$$\rho_H(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (3)$$

y el radio de retorno de las capas de masa colapsantes [1],

$$r_{ta}(t) = \tau(t)^{8/9} \propto t^{8/9}. \quad (4)$$

La normalización, en términos del sistema de coordenadas esféricas, se da de la siguiente manera:

a. Posición:

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = (\lambda, \theta, \phi), \quad \lambda = \frac{r}{r_{ta}(t)}, \quad (5)$$

b. Velocidad:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{r_{ta}(t)}{t} \vec{V}(\lambda, \theta, \phi), \quad (6)$$

c. Densidad:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_H(t) D(\lambda, \theta, \phi), \quad (7)$$

d. Presión:

$$p(\vec{r}, t) = \rho_H(t) \left(\frac{r_{ta}(t)}{t}\right)^2 P(\lambda, \theta, \phi), \quad (8)$$

e. Masa:

$$m(\vec{r}, t) = \frac{4}{3}\pi\rho_H(t)r_{ta}(t)^3 M(\lambda, \theta, \phi), \quad (9)$$

El radio de retorno es la única escala de longitud que es función del tiempo, por tanto, con la anterior normalización, el sistema resulta ser autosimilar, es decir, dada la escala fija λ , es invariable en forma y apariencia para todas las escalas $r = \lambda\tau^{8/9}$.

Con las variables así normalizadas, las ecuaciones (1) toman las siguientes formas adimensionales:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot (D\vec{V}) - 2D - \frac{8}{9}\lambda D' = 0$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} \vec{V} - \frac{1}{9}\vec{V}^2 - \frac{8}{9}\lambda \vec{V}' + \frac{1}{D}\vec{\nabla}_{\vec{R}} P = \frac{2}{9}\vec{\nabla}_{\vec{R}} \int \frac{D_T(\vec{R}'')}{|\vec{R}-\vec{R}''|} d^3\vec{R}'',$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} \left(\frac{P}{D}\right) - \frac{2}{9}\frac{P}{D} - \frac{8}{9}\lambda \left(\frac{P}{D}\right)' + (\gamma - 1)\frac{P}{D}\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{V} = 0, \quad (10)$$

donde las primas indican derivadas parciales respecto de λ .

2.3. Forma explícita de las ecuaciones en coordenadas esféricas

Siendo

$$\vec{V} = (V_\lambda, V_\theta, V_\phi) \quad (11)$$

la velocidad adimensional expresada en términos de sus componentes en coordenadas esféricas y dadas las siguientes definiciones:

$$\chi = \cos\theta,$$

$$u_\lambda = V_\lambda, \quad u_\theta = (1 - \chi^2)^{1/2} V_\theta, \quad (12)$$

$$u_\phi = \frac{V_\phi}{(1 - \chi^2)^{1/2}}, \quad \eta = \frac{P}{D},$$

$$Z = \int \frac{D_T(\vec{R}'')}{|\vec{R}-\vec{R}''|} d^3\vec{R}'',$$

las ecuaciones (10) toman las siguientes formas explícitas en coordenadas esféricas:

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)D' + \frac{2}{\lambda}Du_\lambda + Du'_\lambda - 2D - \frac{1}{\lambda}(D\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}D) + \frac{1}{\lambda}(D\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi + u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}D) = 0, \quad (13)$$

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}u_\lambda + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\lambda + \eta' + \eta\frac{D'}{D} = \frac{2}{9}Z', \quad (14)$$

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\theta - \frac{1}{9}u_\theta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}(u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\theta - \frac{\chi}{1-\chi^2}u_\theta^2) - \frac{1-\chi^2}{\lambda}(\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial\chi}D) = -\frac{2}{9}\frac{1-\chi^2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}Z, \quad (15)$$

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\phi - \frac{1}{9}u_\phi + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi - \frac{1}{\lambda}u_\theta(\frac{\partial}{\partial\chi}u_\phi - \frac{\chi}{1-\chi^2}u_\phi) + \frac{1}{\lambda(1-\chi^2)}(\frac{\partial}{\partial\phi}\eta + \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial\phi}D) = \frac{2}{9}\frac{1}{\lambda(1-\chi^2)}\frac{\partial}{\partial\phi}Z, \quad (16)$$

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)\eta' - \frac{2}{9}\eta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\eta + (\gamma - 1)\eta(\frac{2}{\lambda}u_\lambda + u'_\lambda - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi) = 0. \quad (17)$$

2.4. Aproximación radial

Como una primera aproximación, se consideran las soluciones para λ suficientemente grande, a la cual se llama aquí la aproximación radial. Con ésta consideración, las ecuaciones (13—17) se reducen a las formas:

$$\begin{aligned}
 \lambda D' + \frac{9}{4}D &= 0, \\
 -\frac{8}{9}\lambda u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda - \eta' + \eta \frac{D'}{D} &= \frac{2}{9}Z', \\
 \lambda u'_\theta + \frac{1}{8}u_\theta &= 0, \\
 \lambda u'_\phi + \frac{1}{8}u_\phi &= 0, \\
 \lambda \eta' + \frac{1}{4}\eta &= 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

con soluciones (representadas con el supraíndice r para esta aproximación):

$$\begin{aligned}
 D^r &= D_0 \lambda^{-9/4}, \quad Z^r = \frac{64\pi}{3} D_0 (1 + \epsilon) \lambda^{-1/4}, \\
 u_\lambda^r &= A_0 \lambda^{-1/8} + [\frac{5}{2}\eta_0 - \frac{32\pi}{27}(1 + \epsilon)D_0] \lambda^{-5/4}, \\
 u_\phi^r &= v_0 \lambda^{-1/8}, \quad u_\theta^r = a_0 \lambda^{-1/8}, \\
 \eta^r &= \eta_0 \lambda^{-1/4},
 \end{aligned} \tag{19}$$

Bajo esta aproximación, la integral de la contribución gravitatoria del fluido, Z , resulta proporcional al factor $(1 + \epsilon)$, donde ϵ es el cociente entre la masa de la materia no colisional y la masa del gas colisional.

2.5. Parámetros

Primeramente se considera el parámetro de soporte rotacional, definido como el cociente entre la aceleración gravitatoria y la aceleración centrífuga:

$$\beta_g^2 = \frac{g}{g_\phi} = \frac{Gm(r)}{v_c(r)^2 r} = \frac{32\pi D_0 (1 + \epsilon)}{27 v_0^2}, \tag{20}$$

donde v_c es la velocidad circular del fluido y $m(r)$ la masa total dentro del radio r . Para hallar la última igualdad se ha usado la aproximación radial.

Análogamente se tiene el cociente entre la aceleración del gradiente de presión radial y la aceleración centrífuga:

$$\beta_p^2 = -\frac{r \frac{\partial p}{\partial r}}{v_c(r)^2 \rho(r)} = \frac{5}{2} \frac{\eta_0}{v_0^2}. \tag{21}$$

donde, como antes, se ha usado la aproximación radial para obtener la última igualdad.

Luego, es conveniente introducir el parámetro

$$\chi_0^2 = \beta_g^2 - \beta_p^2 \tag{22}$$

para medir el grado en que los efectos gravitacionales y de los gradientes de presión radial se diferencian.

También se definen las amplitudes de las velocidades u_λ^r y u_θ^r en términos de la amplitud de la velocidad circular:

$$\sigma_\lambda = \frac{A_0}{v_0}, \quad \sigma_\theta = \frac{a_0}{v_0}. \tag{23}$$

De esta manera, dichas velocidades quedan expresadas como:

$$u_\lambda^r = v_0 \sigma_\lambda \lambda^{-1/8} - v_0^2 \chi_0^2 \lambda^{-5/4}, \quad u_\theta^r = v_0 \sigma_\theta \lambda^{-1/8}. \tag{24}$$

Por último, es útil introducir un parámetro que mida el grado en el que el efecto del segundo término en u_λ^r se aparta del efecto del primero, a éste se define como Ω_0 :

$$\chi_0^2 = \frac{9}{32} (\Omega_0^2 + \sigma_\lambda^2). \tag{25}$$

2.6. Equilibrio Hidrostático

En este modelo se consideran condiciones de equilibrio hidrostático en las direcciones $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$, en tal caso se anula la suma de los términos de gradientes de presión y gravitacionales de las siguientes expresiones correspondientes a esas direcciones:

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \eta + \frac{\eta}{D} \frac{\partial D}{\partial \chi} - \frac{2}{9} \frac{\partial Z}{\partial \chi} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \eta + \frac{\eta}{D} \frac{\partial D}{\partial \phi} - \frac{2}{9} \frac{\partial Z}{\partial \phi} = 0.$$

En el caso radial no se da el equilibrio hidrostático a menos que $\chi_0^2 = 0$.

2.7. Formación Estelar

Se modelan los efectos de procesos de formación estelar introduciendo términos de sumidero de masa, momento y energía en las ecuaciones (1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_s,$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{g} + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_s, \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho} (\gamma - 1) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_s,$$

donde s denota a esos términos.

Se plantean las siguientes formas para los términos de sumidero:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_s = \alpha \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

$$\left(\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} \right)_s = \alpha \vec{v} \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \tag{28}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_s = \alpha \frac{p}{\rho} (\gamma - 1) \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

de manera de tener:

$$\frac{d}{dt} \rho = (\alpha - 1) \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + (\alpha - 1) \vec{v} \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = (\alpha - 1) (\gamma - 1) \frac{p}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

con

$$0 \leq \alpha < 1 \tag{30}$$

Así, por ejemplo, si $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$ y $\alpha > 0$, se tiene $d\rho/dt > 0$, pero a una tasa menor debido a la formación de estrellas. El parámetro α determina la intensidad de los procesos de formación estelar.

Con la introducción de la formación estelar, las ecuaciones normalizadas (14), (15) y (16) no cambian de forma, pero las ecuaciones (13) y (17) se modifican a las formas:

$$\begin{aligned} (u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)D' + (1-\alpha)\frac{2}{\lambda}Du_\lambda + (1-\alpha)Du'_\lambda - 2D \\ - \frac{1}{\lambda}[(1-\alpha)D\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}D] \\ + \frac{1}{\lambda}[(1-\alpha)D\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi + u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}D] = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)\eta' - \frac{2}{9}\eta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\eta \\ + (1-\alpha)(\gamma-1)\eta(\frac{2}{\lambda}u_\lambda + u'_\lambda - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

respectivamente.

2.8. Linealización de las Ecuaciones

Como siguiente aproximación se introducen los resultados de la aproximación radial en los coeficientes y términos de inhomogeneidad de las ecuaciones (14—16) y (31—32). Como resultado, todas ellas quedan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)D' + (1-\alpha)D(\frac{2}{\lambda}u_\lambda^r + u_\lambda^{r'}) - 2D \\ - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}D + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}D = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)u_\lambda' - \frac{1}{9}u_\lambda - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}u_\lambda + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}u_\lambda \\ + \eta(\frac{2r'}{\eta r} + \frac{Dr'}{Dr}) = \frac{2}{9}D\frac{Zr'}{Dr}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)u_\theta' - \frac{1}{9}u_\theta - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}u_\theta \\ - \frac{1}{\lambda}\frac{\chi}{1-\chi^2}u_\theta^r u_\theta = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)u_\phi' - \frac{1}{9}u_\phi - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}u_\phi + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi \\ + \frac{1}{\lambda}\frac{\chi}{1-\chi^2}u_\theta^r u_\phi = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)\eta' - \frac{2}{9}\eta - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}\eta \\ + (1-\alpha)(\gamma-1)\eta(\frac{2}{\lambda}u_\lambda^r + u_\lambda^{r'}) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

2.9. Soluciones

Se plantea la siguiente forma general para las soluciones del conjunto (33—37):

$$A = e^{k(\psi(\lambda)+|\chi|)} \sum_m A_m(\lambda, \chi) e^{im(\varphi(\lambda)+\phi)}, \quad (38)$$

donde $k \leq 0$ es un parámetro que sirve para dar el grado de achatamiento del sistema, y donde las funciones ψ y φ obedecen las ecuaciones:

$$(u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)\psi' - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r = 0 \quad (39)$$

y

$$(u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)\varphi' + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r = 0. \quad (40)$$

Definiendo la variable

$$\mu = \lambda^{-9/8}, \quad (41)$$

las soluciones de (39) y (40) son:

$$\psi(\mu) = \frac{16}{9}\sigma_\theta U(\mu), \quad \varphi(\mu) = -\frac{16}{9}U(\mu), \quad (42)$$

donde

$$U(\mu) = \frac{1}{\Omega_0} \tan^{-1} \left\{ \frac{2v_0\chi_0^2\mu + \sigma_\lambda}{\Omega_0} \right\}. \quad (43)$$

En lo que se refiere a las soluciones en la variable ϕ , en este modelo se consideran sólo los términos correspondientes a $m = 0$ y $m = 2$; ésto con el fin de obtener una estructura de dos brazos espirales en la distribución de la materia. Entonces las soluciones tienen como factor a la función:

$$Q(\lambda, \phi) = 1 + \delta \cos(2[\varphi(\lambda) + \phi]), \quad (44)$$

donde δ es un parámetro que sirve para regular el grado de contraste de los brazos en el modelo.

Definiendo las funciones

$$b(\mu) = \frac{9}{8}(v_0^2\chi_0^2\mu^2 - v_0\sigma_\lambda\mu) + 1, \quad (45)$$

$$W(\mu) = U(\mu) - U(0),$$

las soluciones son las siguientes:

$$D = D_0 \frac{\mu^2}{b(\mu)^{(2+\alpha)/3}} e^{-\frac{2}{3}(1-4\alpha)\sigma_\lambda W(\mu)} e^{k(\psi(\mu)+|\chi|)} Q(\mu, \phi), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \eta = \eta_0 \frac{\mu^{2/9}}{b(\mu)^{[\frac{1}{3}-(\gamma-1)(1-\alpha)]/3}} e^{-\frac{8}{3}[(\gamma-1)(1-\alpha)-\frac{1}{12}]\sigma_\lambda W(\mu)} \\ \times e^{k(\psi(\mu)+|\chi|)} Q(\mu, \phi), \end{aligned} \quad (47)$$

$$V_\phi = v_0 \frac{\mu^{1/9}}{b(\mu)^{1/18}} e^{\frac{1}{3}\sigma_\lambda W(\mu)} e^{k(\psi(\mu)+|\chi|)} Q(\mu, \phi), \quad (48)$$

$$V_\theta = \sigma_\theta V_\phi, \quad (49)$$

$$V_\lambda = V_\phi [\sigma_\lambda + v_0 \{ \beta_p^2 \int_0^\mu e^{-\frac{8}{3}[(\gamma-1)(1-\alpha) - \frac{1}{24}]\sigma_\lambda W(\mu')} \frac{d\mu'}{b(\mu')^{[\frac{10}{6} - (\gamma-1)(1-\alpha)]/3}} - \beta_g^2 \int_0^\mu e^{-\frac{7}{3}[\frac{7}{3} - 8\alpha]\sigma_\lambda W(\mu')} \frac{d\mu'}{b(\mu')^{[\frac{20}{6} + \alpha]/3}} \}] \quad (50)$$

Estas soluciones son aplicables tanto al gas colisional como a la materia no colisional. En el caso de la materia no colisional debe tomarse $\eta_0 = 0$ y hacer el cambio $\alpha \rightarrow -\alpha$.

3. ESTRUCTURA OBTENIDA

Se aplica la solución para D dada en la sección anterior a fin de visualizar la estructura del gas colisional correspondiente a ciertos valores de los parámetros del modelo (Figura 1). Como puede verse, se obtiene una estructura de disco con dos brazos espirales que se van enrollando progresivamente hacia el centro de la distribución, dando la imagen de una galaxia espiral.

Considerando los mismos valores de los parámetros dados en la Figura 1, en la Figura 2 se muestra el perfil de densidad, en la Figura 3 se grafica la función η y en la Figura 4 se da la velocidad circular promediada en la variable ϕ . En los tres casos se considera $\chi = 0$, es decir, la variable λ es la distancia al centro de la distribución medida sobre el plano $z = 0$. La forma de la curva de rotación es semejante a las obtenidas observacionalmente para galaxias espirales, con una región empinada al comienzo y una forma casi plana para valores mayores de la distancia al centro.

4. COMPORTAMIENTOS ASINTÓTICOS

4.1. Caso $\lambda \gg 1$

En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} V_\lambda &\propto V_\theta \propto V_\phi \propto \lambda^{-1/8}, \\ D &\propto \lambda^{-9/4}, \\ \eta &\propto \lambda^{-1/4} \rightarrow P \propto \lambda^{-5/2}, \\ M &\propto \lambda^{3/4}. \end{aligned} \quad (51)$$

Los cuales son los escalamientos dominantes encontrados por Bertschinger en el colapso secundario esférico [1].

4.2. Caso $\lambda \ll 1$

Para este caso:

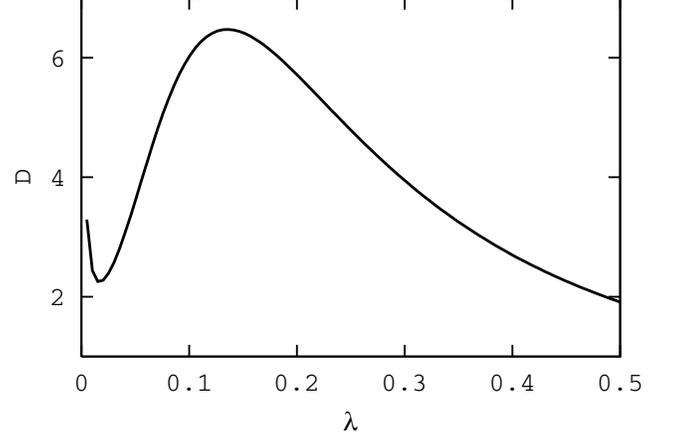


Figura 2. Perfil de densidad para los valores de los parámetros dados en la Figura 1 y para $\chi = 0$.

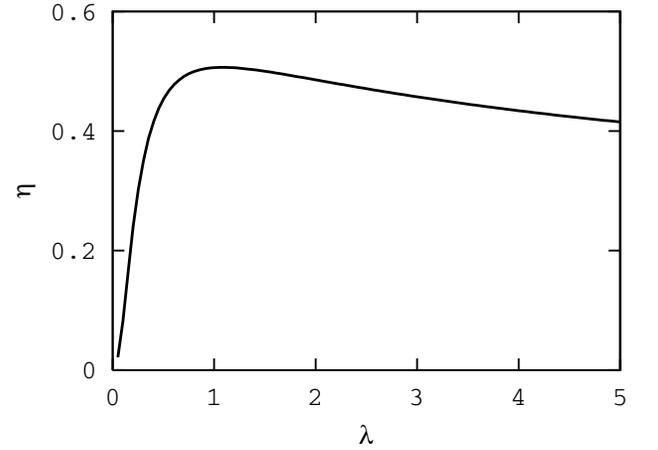


Figura 3. Función η para los valores de los parámetros dados en la Figura 1 y para $\chi = 0$.

$$\begin{aligned} V_\lambda &\propto V_\theta \propto V_\phi \propto 1, \\ D &\propto \lambda^{-\frac{3}{4}(1-\alpha)}, \\ \eta &\propto \lambda^{-\frac{3}{4}(\gamma-1)(1-\alpha)} \rightarrow P \propto \lambda^{-\frac{3}{4}\gamma(1-\alpha)}, \\ M &\propto \lambda^{\frac{3}{4}(1+\alpha/3)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Notemos que a pesar de que la densidad diverge hacia el origen, la masa tiende a cero cuando $\lambda \rightarrow 0$.

5. APLICACIÓN DEL MODELO

A fin de contrastar el modelo obtenido con datos observacionales, se realizan dos ajustes a la estructura de brazos de dos galaxias espirales y otros dos ajustes a las

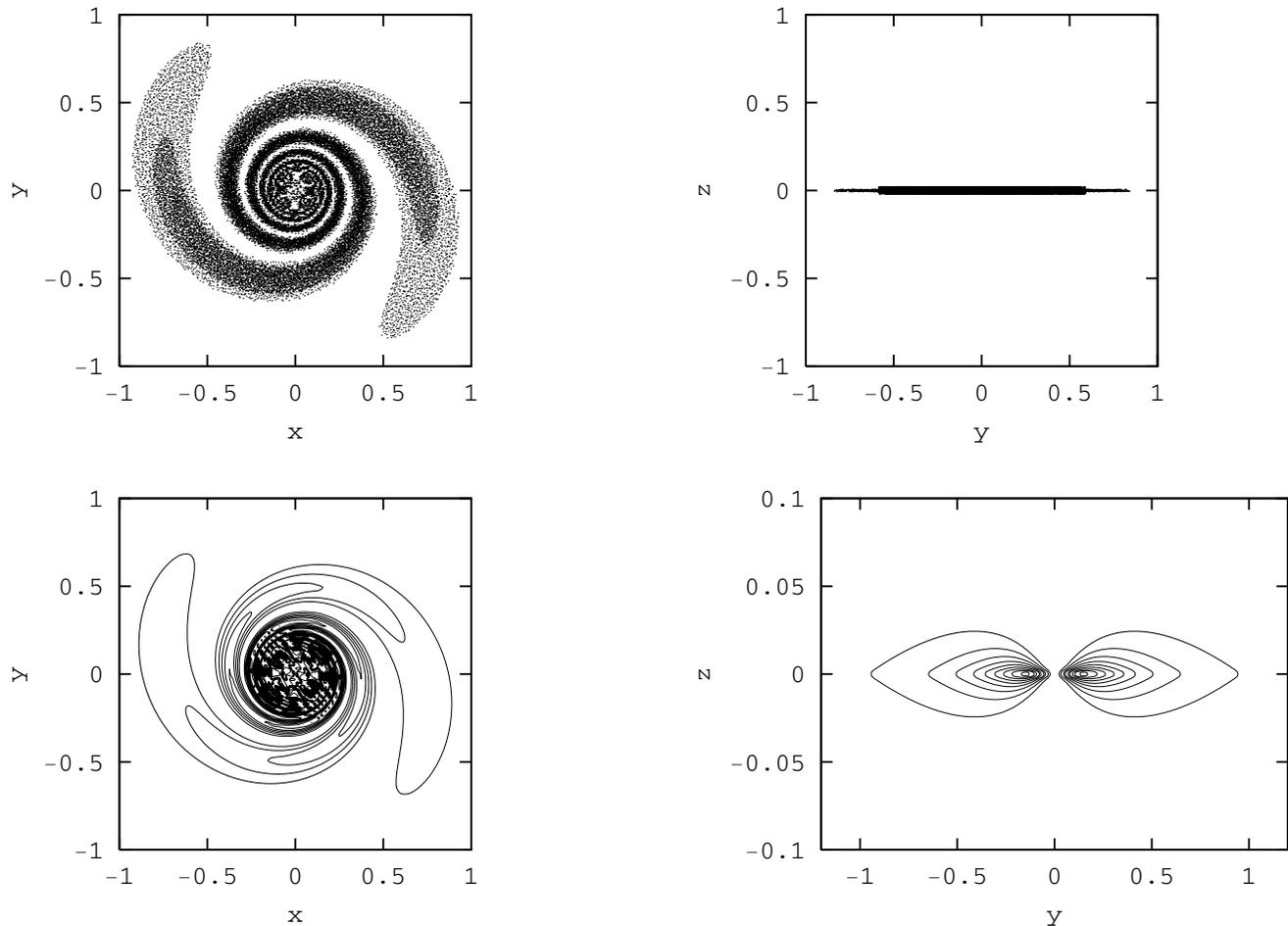


Figura 1. Estructura obtenida y contornos de densidad para $v_0 = 2$, $\sigma_\lambda = -5 \times 10^{-3}$, $\sigma_\theta = 5 \times 10^{-3}$, $\Omega_0 = 0,05$, $k = -25$, $\alpha = 0$ y $\delta = 1$ (para una mejor apreciación, se ha ensanchado el tamaño vertical de la imagen de los contornos de densidad en el plano (x,z)).

TABLA 1

Parámetros obtenidos con el ajuste a la estructura de brazos.

Galaxia	v_0	σ_λ	Ω_0	χ_0^2
NGC 157	21,8	-3,8	0,4	4,2
NGC 5247	59,2	-2,1	1,4	1,8

curvas de rotación de otras dos galaxias. Los resultados se dan a continuación:

5.1. Ajuste a la Estructura de Brazos

Se consideran dos galaxias espirales, NGC 157 y NGC 5247, cuyas inclinaciones respecto al plano perpendicular a la línea de visión pueden considerarse suficientemente pequeñas como para que los datos no se vean afectados apreciablemente por su efecto. Los datos de estas galaxias fueron obtenidos de la base de datos OSUBSGS (*Early Data Release*) [4] y consisten de

un conjunto de valores de intensidad en un arreglo bidimensional de *pixels*. La Figura 5 muestra las imágenes de estas dos galaxias.

El procedimiento se ha aplicado sólo a las trazas de los brazos espirales, es decir, se han elegido sólo los *pixels* correspondientes a los máximos locales en intensidad como trazadores de la estructura espiral. Estos puntos elegidos se muestran también en la Figura 5. Las posiciones de los mismos se refieren al punto correspondiente al *pixel* con la intensidad más alta, el cual es tomado como origen del sistema de coordenadas (x, y) .

Como se trata de los máximos locales de intensidad, se toma como función de ajuste aquella que se obtiene del máximo de la función $Q(\mu, \phi)$. Esta función resulta dependiente de cuatro parámetros, los cuales son los parámetros del ajuste, y tiene la forma:

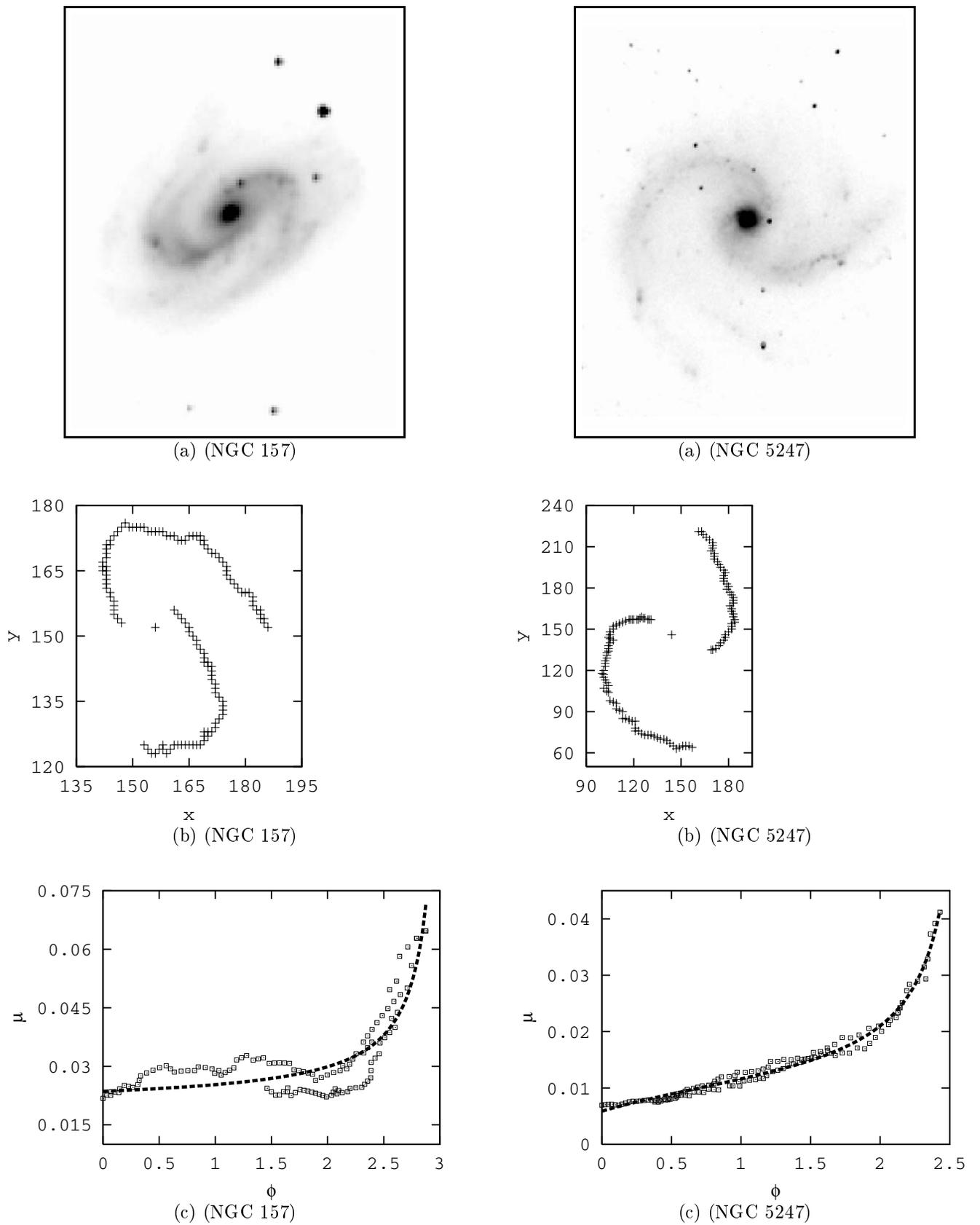


Figura 5. Análisis de la estructura de brazos: (a) Imágenes de las galaxias estudiadas (tomadas de ref. [4]), (b) Trazas de los brazos espirales. (c) Ajuste a las trazas de los brazos espirales.

TABLA 2

Parámetros obtenidos con el ajuste a la curva de rotación.

Galaxia	v_0	σ_λ	Ω_0	χ_0^2	$k\sigma_\theta$
NGC 3198	174,3	$-8,8 \times 10^{-3}$	$1,7 \times 10^{-2}$	10^{-4}	$-7,2 \times 10^{-3}$
NGC 342	355,8	4×10^{-3}	0,01	$3,2 \times 10^{-5}$	$-3,5 \times 10^{-3}$

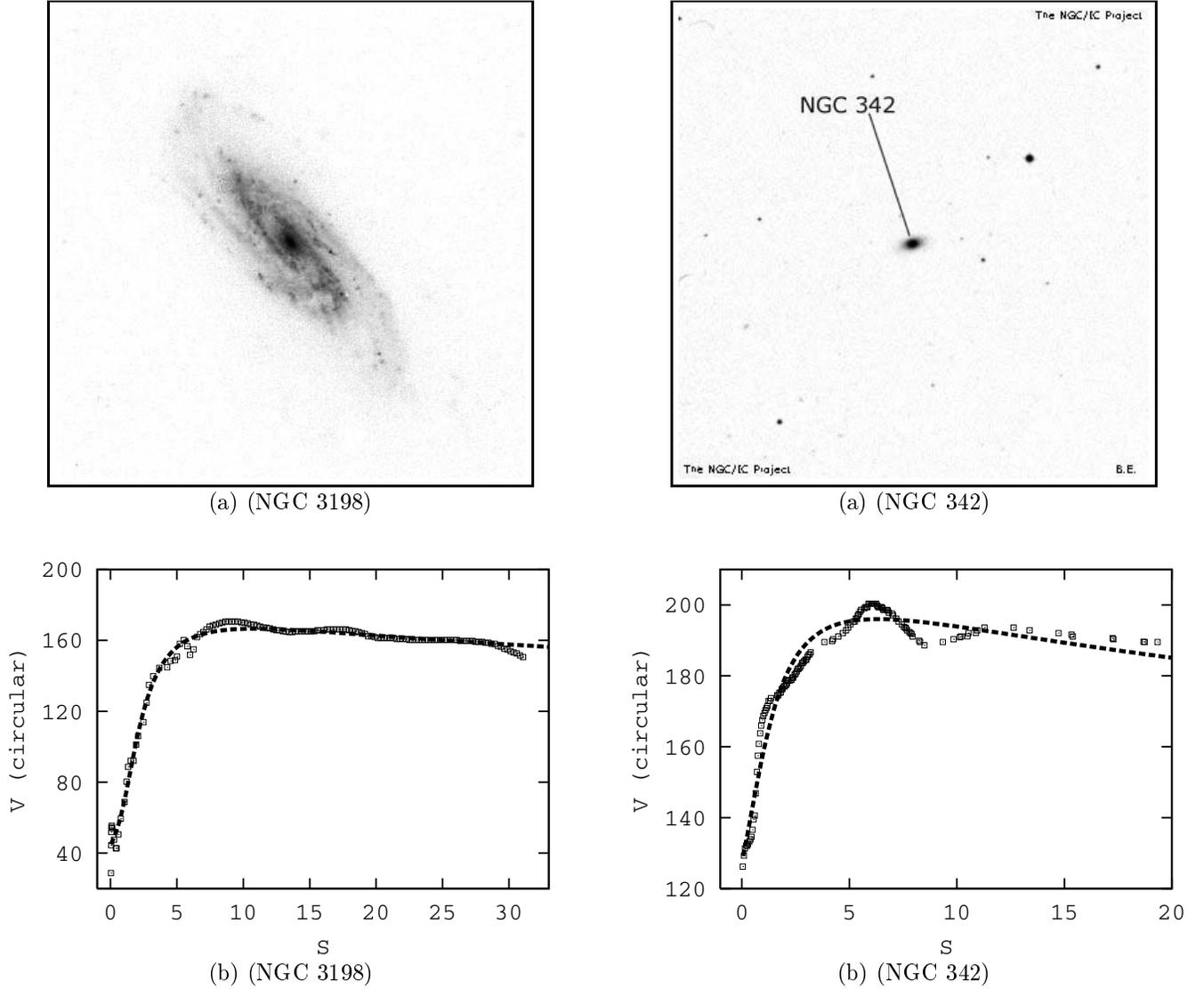


Figura 6. Análisis de la curva de rotación: (a) Imágenes de las galaxias estudiadas (tomadas de refs. [7] y [8]), (b) Ajuste a las curvas de rotación.

$$\mu(\phi) = a_1 \tan[a_2(\phi + a_3)] - a_4;$$

$$a_1 = \frac{\Omega_0}{2v_0\lambda_0^2}, \quad a_2 = \frac{9\Omega_0}{16}, \quad (53)$$

$$a_3 = \varphi_0, \quad a_4 = \frac{\sigma_\lambda}{2v_0\lambda_0^2},$$

donde φ_0 es sólo un término de fase en $Q(\mu, \phi)$.

El ajuste es realizado con el método de Levenberg-

Marquardt [5], el cual es mostrado en la Figura 5. Los parámetros en cada caso son mostrados en la Tabla 1.

5.2. Ajuste a la Curva de Rotación

Se aplica el modelo obtenido a las curvas de rotación de las galaxias NGC 3198 y NGC 342, cuyas imágenes se muestran en la Figura 6. Los datos fueron tomados de la ref. [6]. Se utiliza como función de ajuste la función V_ϕ (ec. 48) promediada en la variable ϕ y valuada en

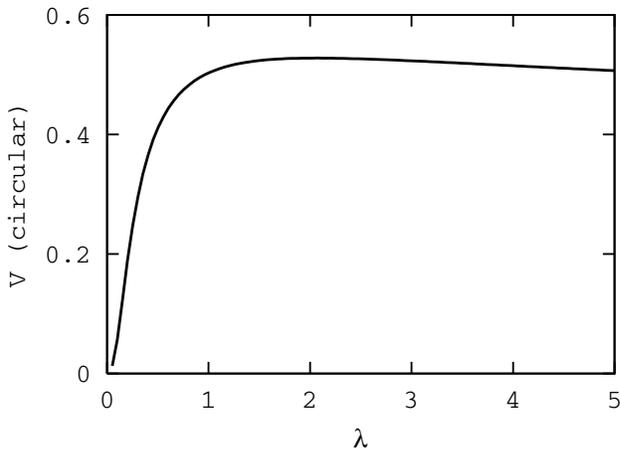


Figura 4. Curva de rotación en las que se representa la velocidad circular promediada en ϕ como función del radio en el plano $z = 0$. Se toman los valores de los parámetros dados en la Figura 1.

$\chi = 0$, la cual también puede ser expresada en términos de cuatro parámetros de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 V(S) = \langle V_\phi \rangle(S) &= \frac{a_1 S^{1/9}}{[(a_3 S - a_4)^2 + 1]^{1/8}} e^{a_2 \tan^{-1}(a_3 S + a_4)}, \\
 a_1 &= v_0 (1 + a_4^2)^{1/8} e^{-\frac{\sigma_\lambda}{9\Omega_0} \tan^{-1}(\frac{\sigma_\lambda}{\Omega_0})}, \\
 a_2 &= \frac{1}{9\Omega_0} (\sigma_\lambda + 16k\sigma_\theta), \\
 a_3 &= \frac{2v_0\lambda_0^2}{\Omega_0}, \quad a_4 = \frac{\sigma_\lambda}{\Omega_0},
 \end{aligned} \tag{54}$$

donde S es la distancia al centro galáctico medida sobre el plano $z = 0$ ($\chi = 0$).

Aquí también se utiliza el método de Levenberg-Marquardt [5] para realizar los ajustes. Éstos se muestran en la Figura 6 y los parámetros obtenidos son dados en la Tabla 2.

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo para galaxias espirales en una situación correspondiente al colapso cosmológico autosimilar sobre una perturbación sobredensa inicial, posterior a la expansión de Hubble en un universo de Einstein-De Sitter ($\Omega = 1$).

Se parte con las ecuaciones de un fluido ideal con interacción gravitatoria, la cual, tiene la contribución de dos componentes: el gas colisional (fluido con presión), conformado por el material interestelar, y la materia no colisional (fluido sin presión), conformada por materia oscura (posiblemente neutrinos) y estrellas. Además se propone un modelo que tome en cuenta los procesos de formación estelar a través de términos de sumidero de masa, momento y energía que son adicionados a

las ecuaciones del fluido. Luego se normalizan las variables y las ecuaciones usando la densidad, el radio de retorno y el tiempo de universo del modelo de expansión estándar, obteniendo un conjunto de ecuaciones hidrodinámicas que describen al sistema de forma autosimilar, donde la única escala espacial dependiente del tiempo es el radio de retorno. Realizada la normalización, las variables dependen sólo de las coordenadas esféricas ($\lambda \propto rt^{-8/9}$, θ , ϕ). Dada la no linealidad de las ecuaciones resultantes se procede a realizar aproximaciones. Primero, en la aproximación radial, se considera el caso en el que λ es suficientemente grande y se obtienen soluciones puramente radiales a fin de calcular de forma simple el término de interacción gravitatoria y de linealizar las ecuaciones en una segunda aproximación. Hecho esto último, se integran las ecuaciones resultantes para obtener las soluciones del presente modelo.

Las soluciones obtenidas para las cantidades termodinámicas y el campo de velocidades presentan dos rasgos comunes, a saber: poseen los mismos factores de estructura espiral y de achatamiento hacia el plano de simetría perpendicular al eje de rotación. Aunque podrían considerarse diversos modos, se ha considerado sólo el modo que da una estructura de dos brazos espirales, la cual representa de buena manera la estructura de las dos galaxias que fueron consideradas a fin de realizar una comparación del modelo con las observaciones. El factor de estructura espiral posee un parámetro, δ que define el grado de contraste de los brazos. Es de esperar que en una mejor aproximación este parámetro sea reemplazado por una función de λ a fin de tener $\delta \rightarrow 0$ (desaparición de los brazos) para valores de λ suficientemente grandes. A este respecto debe resaltarse que el modelo obtenido no posee fronteras donde las cantidades cambien abruptamente sus valores a los dados por la expansión homogénea de Hubble, lo cual podría lograrse introduciendo una onda de choque que se propagase hacia fuera del centro de la distribución. De todas maneras, en el presente modelo todas las cantidades decaen siguiendo leyes de potencias de λ para valores de λ suficientemente grandes. Para estos casos, las amplitudes obtenidas concuerdan con las del escalamiento dominante en las soluciones del colapso secundario esférico [1]. Tal escalamiento tiene la forma $D = \lambda^{-9/4} \tilde{D}(\lambda)$, $P = \lambda^{-5/2} \tilde{P}(\lambda)$ y $M = \lambda^{3/4} \tilde{M}(\lambda)$ para $\gamma > 4/3$ y con \tilde{D} , \tilde{P} y \tilde{M} finitas en el origen. En otras palabras, tenemos que el comportamiento asintótico de las soluciones del presente modelo para λ suficientemente grande coincide con el comportamiento asintótico de las soluciones del colapso secundario esférico para λ suficientemente pequeño (y $\gamma > 4/3$). Sin embargo, esto no es siempre cierto para el caso de la velocidad radial, pues en el presente modelo esta se escala como $V_\lambda \propto \sigma_\lambda \lambda^{-1/8}$ para λ suficientemente grande, mientras que en el colapso secundario esférico esta velocidad tiende a cero para λ que tiende a valores pequeños; la coincidencia se daría sólo en el caso $\sigma_\lambda = 0$. De cualquier manera, desaparece la necesidad de la introducción de un choque si se considera que las soluciones obtenidas

en este trabajo son válidas en las regiones más interiores de un sistema colapsante que se ha alejado de la expansión. Con respecto al factor de achatamiento, éste posee un parámetro, k , que da el grado de compactación del sistema galáctico hacia su plano de simetría. En una mejor aproximación, se esperaría que el grado de achatamiento disminuya a medida que λ crezca, de manera de tener soluciones con simetría esférica para valores de λ suficientemente grandes. Una posibilidad sería aquella en la cual k pueda ser reemplazado por una función de λ decreciente en valor absoluto. No se ha analizado ese caso aquí y queda como una cuestión pendiente al igual que el caso del parámetro δ arriba mencionado.

La estructura obtenida es autosimilar, pues dada una escala λ fija, la estructura en una escala r al tiempo t es la misma estructura en una escala $r' < r$ en un tiempo anterior $t' < t$, y viceversa. Así, puesto que el grado de enrollamiento de los brazos aumenta a medida que λ disminuye, dada una escala espacial fija, dentro de la misma el grado de enrollamiento de los brazos aumenta con el tiempo. Por otro lado, dada una escala λ fija, lo que determina el grado de enrollamiento es la amplitud de la velocidad circular v_0 : a mayor valor de $|v_0|$, mayor el grado de enrollamiento. Puesto que el factor que determina la estructura de brazos, Q , se aplica a todas las soluciones, la velocidad es mayor en las regiones donde la densidad es mayor; en particular, la velocidad circular en las regiones donde los brazos son más intensos es mayor que la del resto.

Para valores muy pequeños de $v_0^2\lambda_0^2$ y $v_0\sigma_\lambda$, los comportamientos para todo λ no se alejan mucho de los comportamientos para $\lambda \gg 1$. En este caso, con valores muy pequeños de k y de δ , las estructuras serían esferoidales (semejantes a las galaxias elípticas). En este punto aparece una cuestión más delicada: En las galaxias espirales observadas dominan dos componentes, una de disco, donde está el gas y se forman estrellas jóvenes, y otra de halo, donde se encuentran mayormente estrellas viejas y hay ausencia de gas. La del halo tiene una estructura esferoidal, con una densidad de estrellas que crece hacia el centro galáctico, dando la imagen de un bulbo central. Además, la rotación del halo es pequeña frente a la del disco. Estas diferencias indican que en una misma escala λ conviven dos estructuras para las cuales los parámetros del modelo serían diferentes. El modelo presentado aquí no puede explicar este dilema, se limita sólo a representar de buena manera ambos tipos de estructuras. Se podría pensar que inicialmente los parámetros eran los mismos para ambas componentes y que posteriormente al inicio del colapso éstos fueron cambiando debido a procesos de disipación y formación de estrellas.

En lo que respecta al modelo de formación estelar propuesto, éste ha permitido obtener la distribución de estrellas de todos los tipos formadas a partir de una componente gaseosa con parámetros de modelo definidos.

Sin embargo, este modelo aunque sencillo, dependiendo de un sólo parámetro, α , debe confrontarse con las observaciones. Más aún, en una mejor aproximación, el parámetro α debería ser reemplazado por una función de λ .

Las curvas de rotación obtenidas se ajustan de buen modo a las curvas observacionales de las dos galaxias consideradas. La forma empinada cerca del centro galáctico es fuertemente dependiente del parámetro $k\sigma_\theta$; en las regiones alejadas del centro la forma tiende a ley de potencias $\lambda^{-1/8}$, que es la solución de la aproximación radial.

El modelo presentado en este trabajo reproduce los rasgos generales y típicos de las galaxias espirales, muestra un buen acuerdo con las observaciones y mantiene su característica autosimilar. A pesar de las aproximaciones realizadas y de que no puede explicar la presencia de más de una componente con parámetros distintos, representa de buena forma cada una de ellas dando las funciones termodinámicas, estructurales y dinámicas como funciones de la posición y del tiempo. En la discusión dada arriba se presentan algunas de las varias cuestiones pendientes a fin de lograr una mejor aproximación en posteriores trabajos.

AGRADECIMIENTOS

Para la obtención de las imágenes y realización de los ajustes a la estructura, este trabajo ha hecho uso de datos pertenecientes al proyecto *the Ohio State University Bright Spiral Galaxy Survey*, que fue financiado por los presupuestos asignados *AST-9217716* y *AST-9617006* de la *United States National Science Foundation*, con soporte adicional de la *Universidad Ohio State University*. Se agradece con la mayor consideración a este Proyecto y a estas Instituciones el haber permitido hacer uso de estos datos.

REFERENCIAS

- [1] Bertschinger, E. 1985, *Ap. J. (Supplement Series)*, 58, 39.
- [2] Peebles, P. J. E. 1993, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton: Princeton University Press).
- [3] Urzagasti, D. 2001, *Revista Boliviana de Física*, N°7, Vol.1, 34.
- [4] Eskridge, P.B. et al., 2002, *ApJS*, 143, (in press). [astro-ph/0206320].
- [5] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical Recipes in FORTRAN, Second Edition*, Cambridge University Press, 1992.
- [6] Sofue, Y., 1996, 1997. www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/rotation/data.htm.
- [7] www.astro.princeton.edu/~frei/Gcat_htm/Catalog.
- [8] www.kepu.gov.cn/zlg/yuzhou/images/ngc/n0342.jpg.
- [9] Burbidge, E. M., *The Evolution of Spiral Structure, Structure and Evolution of the Galaxy*, editado por L. N. Mavridis, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1971.

EL PÉNDULO ELÁSTICO CLÁSICO VISTO COMO UN PROBLEMA CUÁNTICO CRISTALINO

Diego Sanjinés C.¹

Carrera de Física—U.M.S.A.

RESUMEN

Se estudia la analogía entre el curioso comportamiento dinámico de un péndulo elástico clásico en la llamada “resonancia 2:1”, y el problema espectral cuántico correspondiente a un electrón cristalino que puede encontrarse en lo que equivaldría ya sea a un estado metálico o a un estado aislante, de acuerdo a la teoría de bandas unidimensional en estado sólido. Ambos problemas, clásico y cuántico, pueden describirse bajo un mismo formalismo matemático, que comprende el estudio de la ecuación de Mathieu y sus propiedades analíticas. Como resultado de esta investigación teórica, se encontró que el fenómeno clásico de la “resonancia 2:1” corresponde a un nivel energético prohibido (brecha), lo que implica que el electrón cristalino se encontraría en un estado aislante. En ausencia de esta “resonancia”, el electrón se encontraría en un estado metálico.⁽²⁾

1. INTRODUCCIÓN

El péndulo elástico clásico puede considerarse, en el caso más simple, como un sistema mecánico con dos grados de libertad, r y ϕ (Fig.1), de tal forma que ambas variables dependen del tiempo simultáneamente. La oscilación correspondiente a $r(t)$ puede referirse como “modo longitudinal” (o elástico), mientras que la oscilación correspondiente a $\phi(t)$ será referida como “modo pendular” (o angular). Generalmente, para un valor arbitrario de la masa m , se encuentra que el péndulo elástico oscila en el modo longitudinal si es excitado inicialmente en ese modo, por ejemplo, a través de las condiciones iniciales

$$r(0) = r_0 + mg/K + \Delta r, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad (1)$$

$$\phi(0) \cong 0 \text{ } ^{(3)}, \quad \dot{\phi}(0) = 0,$$

así como también oscila en el modo pendular si es excitado inicialmente en ese modo, por ejemplo, a través de las condiciones iniciales

$$r(0) = r_0 + mg/K, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad (2)$$

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(0) = 0.$$

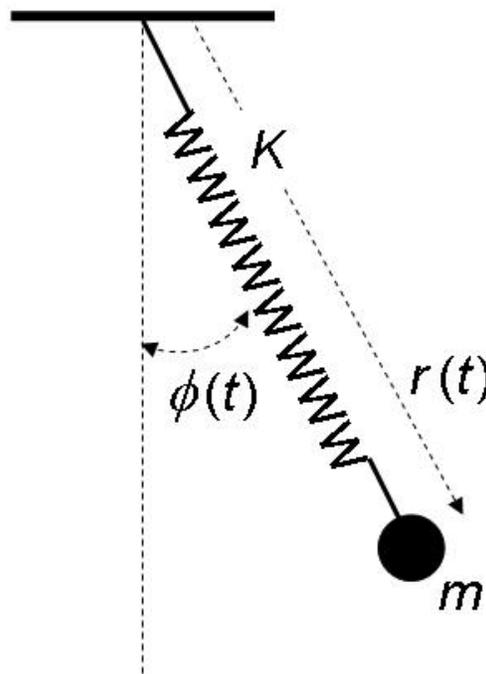


Figura 1. Péndulo elástico en régimen de pequeñas oscilaciones con grados de libertad $r(t)$ y $\phi(t)$.

Sin embargo, para ciertos valores particulares de m , se da la curiosa condición de que el modo inicialmente longitudinal pasa a ser completamente pendular después de un número de oscilaciones, regresando nuevamente al modo longitudinal. Este comportamiento se repite en forma alternada mientras se va disipando la energía inicial del sistema. Formalmente se dice entonces que para aquellos valores particulares de m , los modos longitudinal y pendular se acoplan y la energía total del sistema pasa de manera alternada de un modo a otro.

¹Email: sanjines@fiums.a.edu.bo

²La analogía entre los problemas clásico y cuántico tal como se presenta en este trabajo, reviste un interés pedagógico sin un mayor compromiso con predicciones físicas experimentales, en vista de las restricciones teóricas del modelo usado, por ejemplo, la teoría de bandas en una dimensión.

³Esta aproximación se refiere a la imposibilidad física real de lograr que el sistema comience a oscilar en forma *exactamente* vertical, lo que tendrá implicaciones relevantes más adelante.

La primera vez que este fenómeno llamó la atención del autor fue en ocasión de un experimento sencillo de laboratorio básico [1] en el que se trata de determinar la constante elástica de un resorte por el método estático y por el método dinámico. Luego de un análisis bibliográfico, se constató que el fenómeno en cuestión ha sido desde hace tiempo un motivo de atención por parte de la comunidad científica. De acuerdo a la bibliografía consultada, el estudio de este fenómeno se remonta desde 1933 [2] hasta trabajos exhaustivos recientes en 2002 [3]. En este periodo, existe una gran cantidad de trabajos que abordan el “extraño” comportamiento del péndulo elástico como una motivación para estudios de gran profundidad en el campo de los sistemas dinámicos. Debe señalarse que en el trabajo reciente de Lynch [3], este autor sugiere una conexión novedosa entre el péndulo elástico y un modelo simple de balance atmosférico, logrando así conectar, de una manera rigurosa, dos problemas físicos de áreas diferentes. Otros artículos como los de Olsson [4], Cayton [5] y Falk [6], son muy pedagógicos y accesibles. En este trabajo se propone otra conexión conceptual, muy interesante y nada trivial, entre otras dos áreas de la física típicamente independientes: los sistemas dinámicos clásicos y la teoría espectral cuántica. Como un antecedente útil para este propósito, se acudirá a una interpretación de la ecuación unidimensional de Schrödinger como un problema dinámico clásico [7], de donde se puede adaptar algunos resultados en lo que sigue.

2. EL PÉNDULO ELÁSTICO

La energía cinética de la masa m en la Fig.1 es

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2), \quad (3)$$

mientras que la energía potencial V comprende los términos de energía elástica y energía gravitacional:

$$V = \frac{1}{2}K (r - r_0)^2 - mgr \cos \phi. \quad (4)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir del formalismo lagrangiano donde $L = T - V$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (5)$$

con las variables $q = r$ y $q = \phi$. Aplicando (5) a cada variable, se obtiene el sistema acoplado de ecuaciones no-lineales

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \alpha r - \beta = 0, \quad (6)$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + g\phi = 0. \quad (7)$$

Para obtener las anteriores ecs. (6) y (7) se supuso la aproximación para pequeñas oscilaciones: $\sin \phi \cong \phi$, $\cos \phi \cong 1$, y se definió $\alpha \equiv K/m$, $\beta \equiv \alpha r_0 + g$. La simulación numérica de las soluciones de las ecuaciones

(6) y (7) debe reproducir los aspectos cualitativos esenciales del fenómeno de transferencia de energía entre los modos de oscilación longitudinal y pendular. Para ello, investiguemos cuál debe ser el valor particular de la masa m para el que ocurre dicho fenómeno. Un criterio intuitivo muy sencillo que nos permitirá calcular esa masa es la siguiente condición de resonancia: en cada medio periodo T_p del modo pendular permítase solamente un número entero n de periodos T_r del modo longitudinal, de tal forma que cuando la masa m se encuentre en los puntos de retorno de su recorrido pendular, coincida con las mismas condiciones iniciales de su oscilación longitudinal. Lo anterior se traduce como $T_p = 2nT_r$, donde $T_p = 2\pi\sqrt{r/g}$ y $T_r = 2\pi\sqrt{m/K}$. Combinando las anteriores ecuaciones se obtiene el cociente entre la longitud r del resorte cargado con la masa m en su extremo y la longitud r_0 de relajamiento del resorte (sin carga):

$$\frac{r}{r_0} = \frac{4n^2}{4n^2 - 1}. \quad (8)$$

Para el caso de $n = 1$, se obtiene $r/r_0 = 4/3$, o bien, en términos de las frecuencias angulares, $\omega_r = 2\omega_p$. Esta es justamente la condición que debe encontrar la masa m : ser tal que el cociente de las longitudes del resorte cargado y sin carga sea $4/3$, o bien, que la frecuencia natural del modo longitudinal sea el doble de la del modo pendular. Por esta razón, el fenómeno de transferencia de energía entre ambos modos de oscilación puede ser referido como “sistema masa-resorte $4/3$ ”, o —como es usual en la literatura— “resonancia $2:1$ ”. A fin de simular numéricamente el sistema de ecuaciones (6) y (7), elijamos las condiciones iniciales (1) para las que el sistema está excitado en el modo longitudinal:

$$\begin{aligned} r(0) &= (\gamma + 1)r_0 + 0,02, & \dot{r}(0) &= 0, \\ \phi(0) &= 0,017, & \dot{\phi}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

donde r se mide en metros y ϕ en radianes; además, se definió $\gamma \equiv r/r_0 - 1$, de tal forma que la condición de resonancia corresponda a $\gamma = 1/3$. El ángulo inicial $\phi(0) = 1^\circ \cong 0,017$ rad se eligió así para representar una típica desviación vertical muy pequeña al momento de iniciar el modo longitudinal. La interpretación física sugerida es que dicha desviación vertical insignificante se va ampliando a medida que ocurren las oscilaciones longitudinales, siempre que el sistema obedezca la condición de resonancia $\gamma = 1/3$. De otra forma, la desviación vertical nunca se amplificó y el sistema permanecerá en el modo longitudinal. Si esta interpretación física es correcta, entonces debe ser posible verificar que, aunque haya resonancia, si $\phi(0) = 0$, no habrá desviación vertical alguna que se pueda amplificar (este sería el modo *estrictamente* longitudinal).

En efecto, la simulación numérica mostrada en la Fig.2(a) verifica la predicción señalada para $\gamma = 1/3$ con la condición inicial (9); se observa claramente la transición entre los modos longitudinal y pendular después

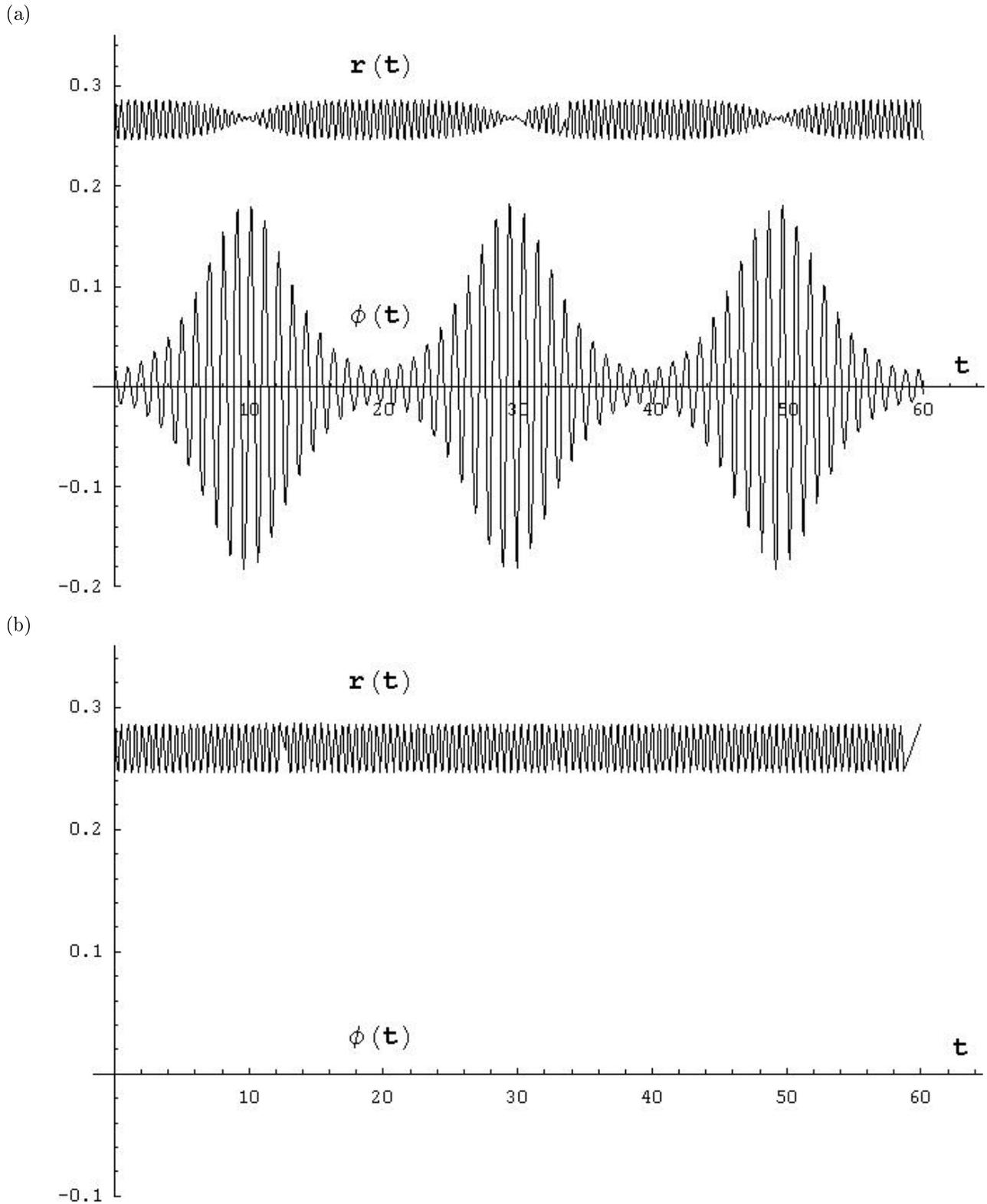
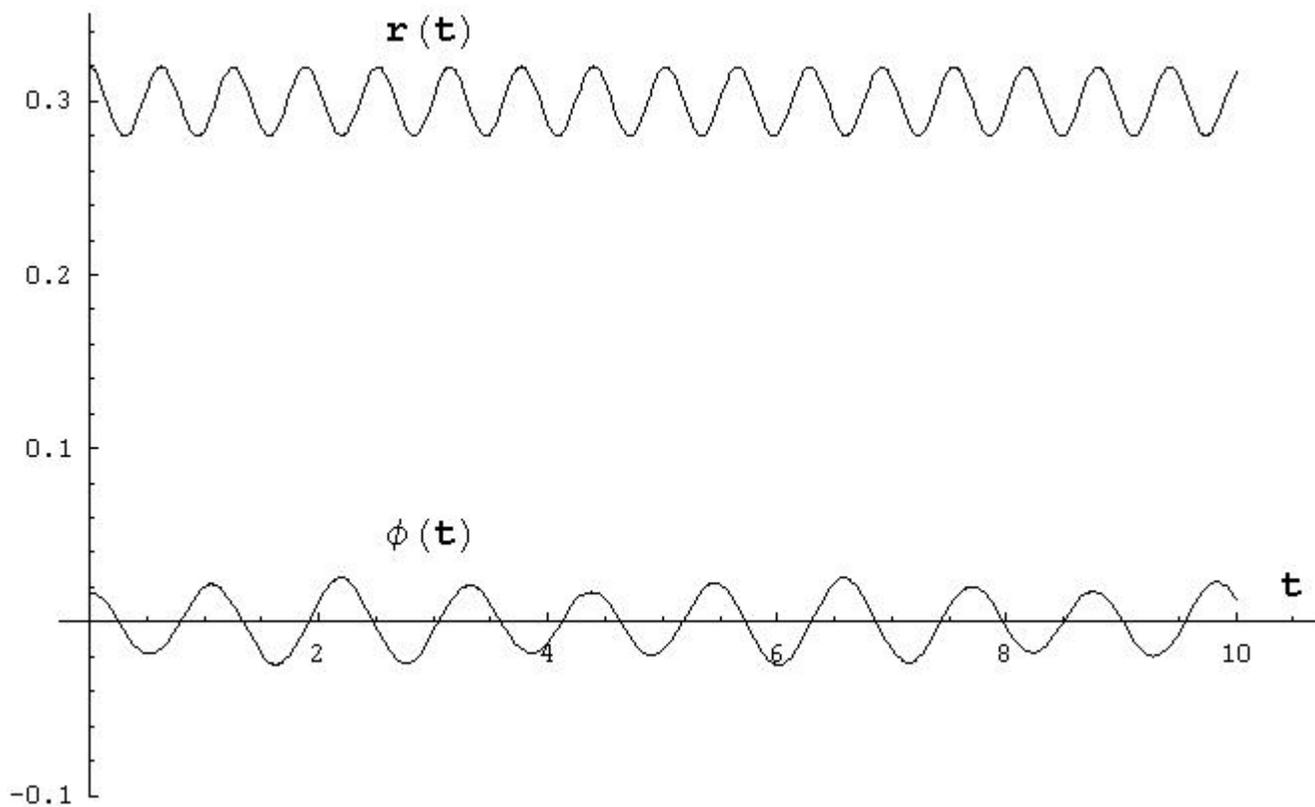


Figura 2. Soluciones numéricas del sistema de ecuaciones (6) y (7). En (a), (c) y (d) las condiciones iniciales están dadas por (9) con valores $\gamma = 1/3, 1/2, 1/4$ respectivamente, donde $\gamma = 1/3$ es la condición de resonancia que permite la transición entre los modos longitudinal y pendular. En (b) se tiene en particular $\phi(0) = 0$ y $\gamma = 1/3$, por lo que —aunque haya condición de resonancia— el modo de oscilación permanece en un régimen *estrictamente* longitudinal, i.e., $\phi(t) = 0$. En (c) y (d) los modos también son longitudinales, pero $\phi(t) \cong 0$ se considera como una pequeña perturbación.

(c)



(d)

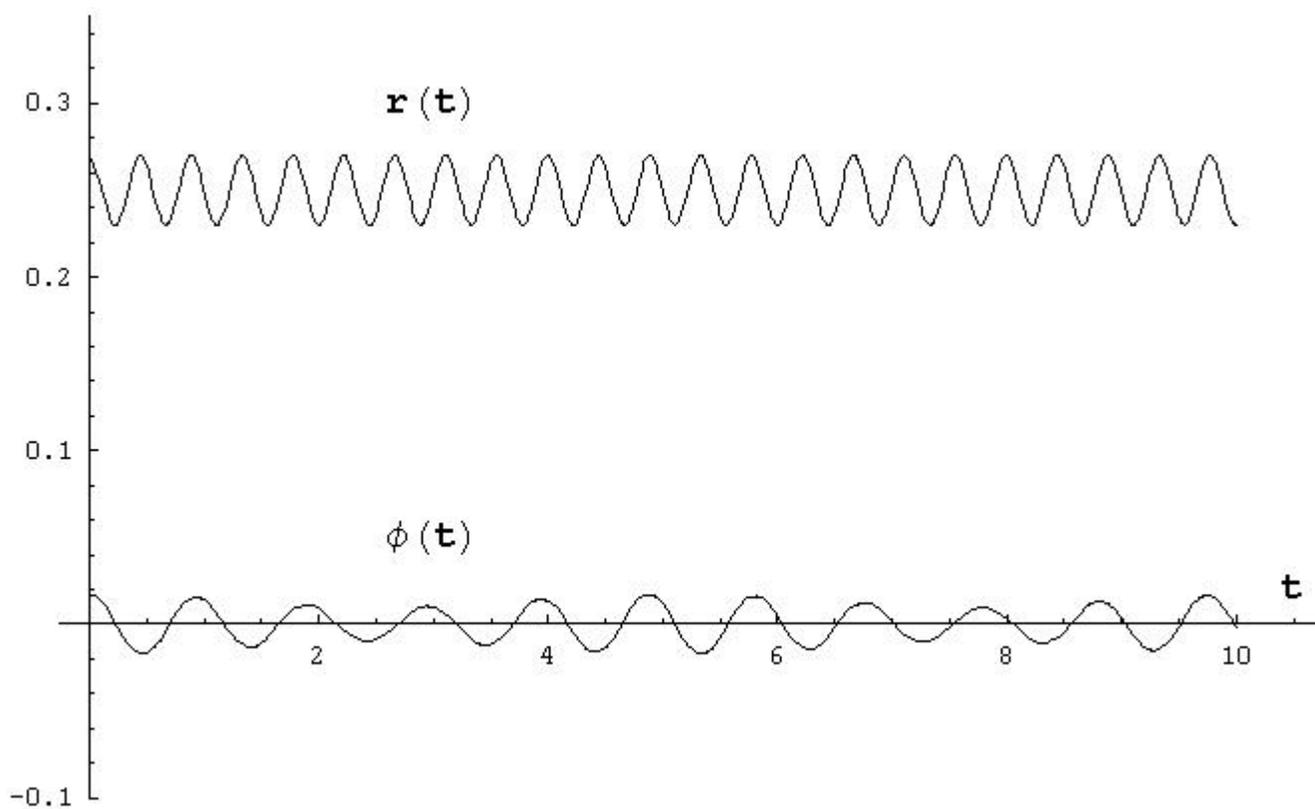


Figura 2. Continuación.

de unas 10 oscilaciones. En la Fig.2(b), debido a que $\phi(0) = 0$ *exactamente*, no existe una transición entre modos de oscilación, permaneciendo el sistema en el modo *estrictamente* longitudinal. En las Figs.2(c) y (d) se eligió $\gamma = 1/2$ y $\gamma = 1/4$ respectivamente, por lo que en ambos casos el modo de oscilación permanece longitudinal aunque se haya elegido $\phi(0) = 0,017$ rad, es decir, la pequeña desviación vertical no se amplifica pues no se da la condición de resonancia. Así, las oscilaciones pendulares permanecen como pequeñas perturbaciones del modo longitudinal.

Desde el punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos, el fenómeno referido en este trabajo corresponde a la llamada “resonancia paramétrica” [8], cuyas características están relacionadas con las propiedades matemáticas de la ecuación de Mathieu. Para ver el origen de esta ecuación en el caso del péndulo elástico, sigamos el tratamiento de Olsson [4]: se quiere describir la proyección horizontal del movimiento de la masa m , esto es, $x(t) = r(t) \cos \phi$, dentro del régimen de pequeñas oscilaciones válidas tanto para el modo longitudinal, como para el modo pendular, es decir, $r(t) = r_0 + mg/K + \Delta r(t)$, con $\Delta r(t) = a \cos(\omega_r t)$, donde la amplitud a es una cantidad pequeña. De esta forma se obtiene la ecuación de movimiento para $x(t)$:

$$\ddot{x} + (\omega_p^2 - \lambda a \cos \omega_r t) x = 0, \quad (10)$$

con $\lambda \equiv \omega_s^2 r_0 / r^2$ (λ *no* es una cantidad pequeña). La ecuación (10) es la ecuación de Mathieu —que es, a su vez, un tipo particular de ecuación de Hill [9] [10]—, cuya principal característica es la de ser una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con el coeficiente (de x) variable de manera armónica. Como lo muestra Lynch [3], la ecuación de Mathieu (10) se puede obtener a partir del sistema de ecuaciones (6) y (7). La teoría de sistemas dinámicos trata ampliamente sobre las propiedades de (10) en lo que concierne a la estabilidad de su solución $x(t)$, esto es, a medida que el tiempo t “avanza”, el valor de $x(t)$ puede crecer de manera desacetada (inestabilidad) o permanecer acotado dentro de ciertos límites (estabilidad). La condición de inestabilidad es precisamente $\omega_r = 2\omega_p$, lo que indica que la masa del péndulo elástico comenzará a realizar recorridos horizontales cada vez mayores, es decir, pasará del modo longitudinal al modo pendular. Sin embargo, ya que las ecuaciones (6) y (7), y por lo tanto (10), son consistentes con el régimen de pequeñas oscilaciones, la inestabilidad de $x(t)$ o “resonancia paramétrica” del péndulo elástico no será “explosiva”, por lo que el valor de $x(t)$ aumentará hasta cierto valor máximo, después de lo cual retornará a valores muy pequeños, de acuerdo a la simulación de la Fig.2(a).

3. EL ESPECTRO CUÁNTICO CRISTALINO

Considérese el problema de la dinámica de un electrón en presencia del potencial periódico cristalino

unidimensional $V(x+L) = V(L)$, con una constante de red L . Este puede ser el caso de una hetero-estructura de semiconductores formada por capas alternadas de $GaAs$ y $Al_xGa_{1-x}As$ (con $x = 0,3$, por ejemplo), donde la constante L puede ser del orden de cientos de Å. Desarrollos recientes durante los años 90 han permitido dilucidar la verdadera naturaleza de los fenómenos de transporte eléctrico en dichas hetero-estructuras, de los que la oscilación de Bloch es un ejemplo típico [11] [12] [13]. La ecuación de Schrödinger para una partícula en presencia del potencial periódico $V(x) = V_0 \cos(2\pi x/L)$ es

$$\partial_x^2 \Psi + (2m/\hbar^2) (E - V_0 \cos \pi x) \Psi = 0, \quad (11)$$

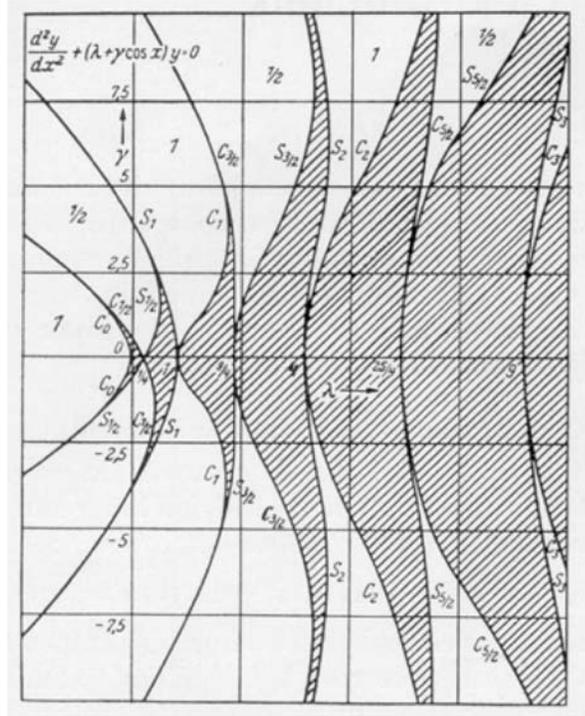
donde no se considera la dependencia de la masa efectiva $m = m^*$ de la forma explícita de la banda $\varepsilon(k)$, i.e., $m^* = \hbar^2 (\partial_k^2 \varepsilon(k))^{-1}$, con una estructura de bandas $\varepsilon(k)$ que se puede calcular para un modelo dado de hamiltoniano, e.g., el modelo de enlace fuerte (*tight-binding*) [14]. Otro modelo de hamiltoniano puede ser el de BenDaniel-Duke [15] que toma en cuenta la dependencia de la masa efectiva con la posición.

La ecuación de Schrödinger (11) también es un ejemplo de ecuación de Mathieu formalmente análoga a (10) después de identificar las correspondencias entre las variables físicas. Así, (11) también estaría sujeta a una interpretación en términos de “estabilidad”: las únicas soluciones físicamente relevantes de (11) son las funciones de onda $\Psi(x)$ acotadas, que pueden ser interpretadas en términos de densidades de probabilidad finitas dadas por $\Psi^* \Psi = |\Psi|^2$. Tal condición de “estabilidad” se logra al elegir los parámetros adecuados E y V_0 en (11). El gráfico que muestra los posibles valores del par ordenado (E, V_0) que conduce a soluciones estables de (11) se denomina “diagrama de Strutt”, y es conocido en el dominio de los sistemas dinámicos desde principios del siglo XX. La Fig.3(a) muestra este diagrama que es formalmente idéntico al de cualquier texto típico, por ejemplo, Bender-Orszag [8]. En este caso, la ecuación de Mathieu es $y'' + (\lambda + \gamma \cos x)y = 0$; así, el diagrama de estabilidad con ejes γ (vertical) y λ (horizontal) muestra las zonas de estabilidad (sombreadas) y las zonas de inestabilidad (sin sombreado). La construcción de este tipo de diagramas es un asunto complejo pues no existe una forma analítica compacta para representar las curvas que definen las zonas de estabilidad. El diagrama de la Fig.3(a) se construyó por zonas específicas en las que se obtiene soluciones particulares de la ecuación de Mathieu por técnicas perturbativas [9]. Sin embargo, existe una forma analítica de obtener, de manera aproximada, las zonas de la Fig.3(a): el potencial $V(x') \equiv V_0 \cos(\pi x')$ con $x' \equiv 2x/L$ en (11) se puede *segmentar* como

$$\begin{aligned} V(x') &= V_0, & x' &\in [0, 1); \\ V(x') &= -V_0, & x' &\in [1, 2). \end{aligned} \quad (12)$$

Con este potencial constante por tramos, se aplica la teoría de estabilidad de sistemas dinámicos [7] a fin

(a)



(b)

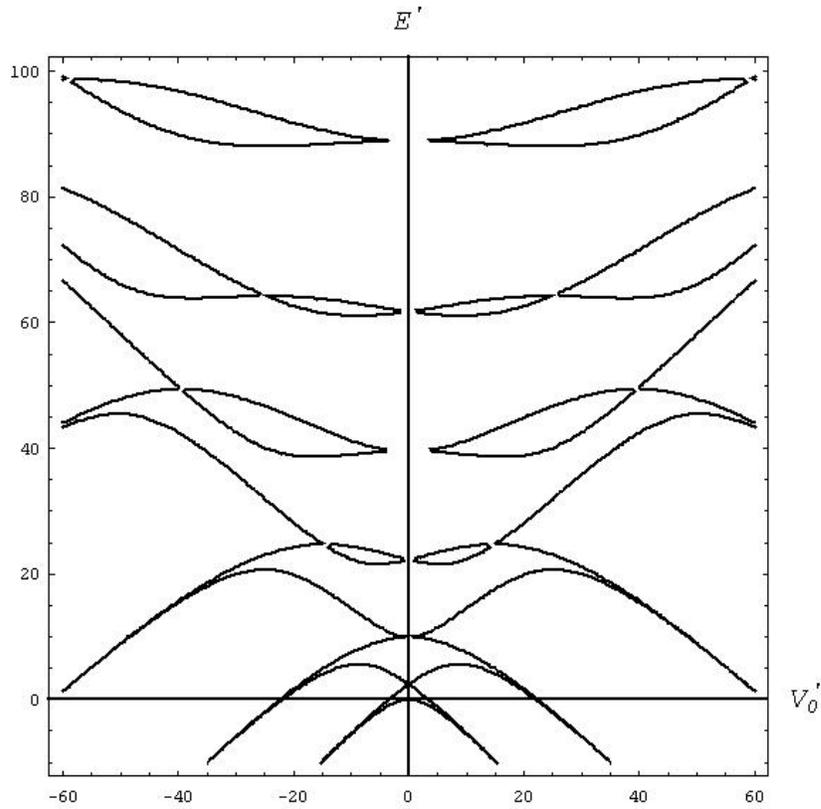


Figura 3. (a) Diagrama de Strutt para la ecuación de Mathieu $y'' + (\lambda + \gamma \cos x)y = 0$, donde las regiones sombreadas corresponden a los parámetros λ y γ que conducen a un régimen *estable* de la solución $y(x)$ de dicha ecuación. En (b) se muestra el diagrama de estabilidad correspondiente a la ecuación de Schrödinger (11) donde el potencial $V_0 \cos \pi x$ se segmentó de acuerdo (12), aproximándolo así por un modelo de Krönig-Penney. La similitud entre las primeras dos “lenguas” de estabilidad en torno al origen de coordenadas en ambos gráficos (después de rotar (a) $\pi/2$ en sentido antihorario) es suficientemente buena para el propósito de este trabajo.

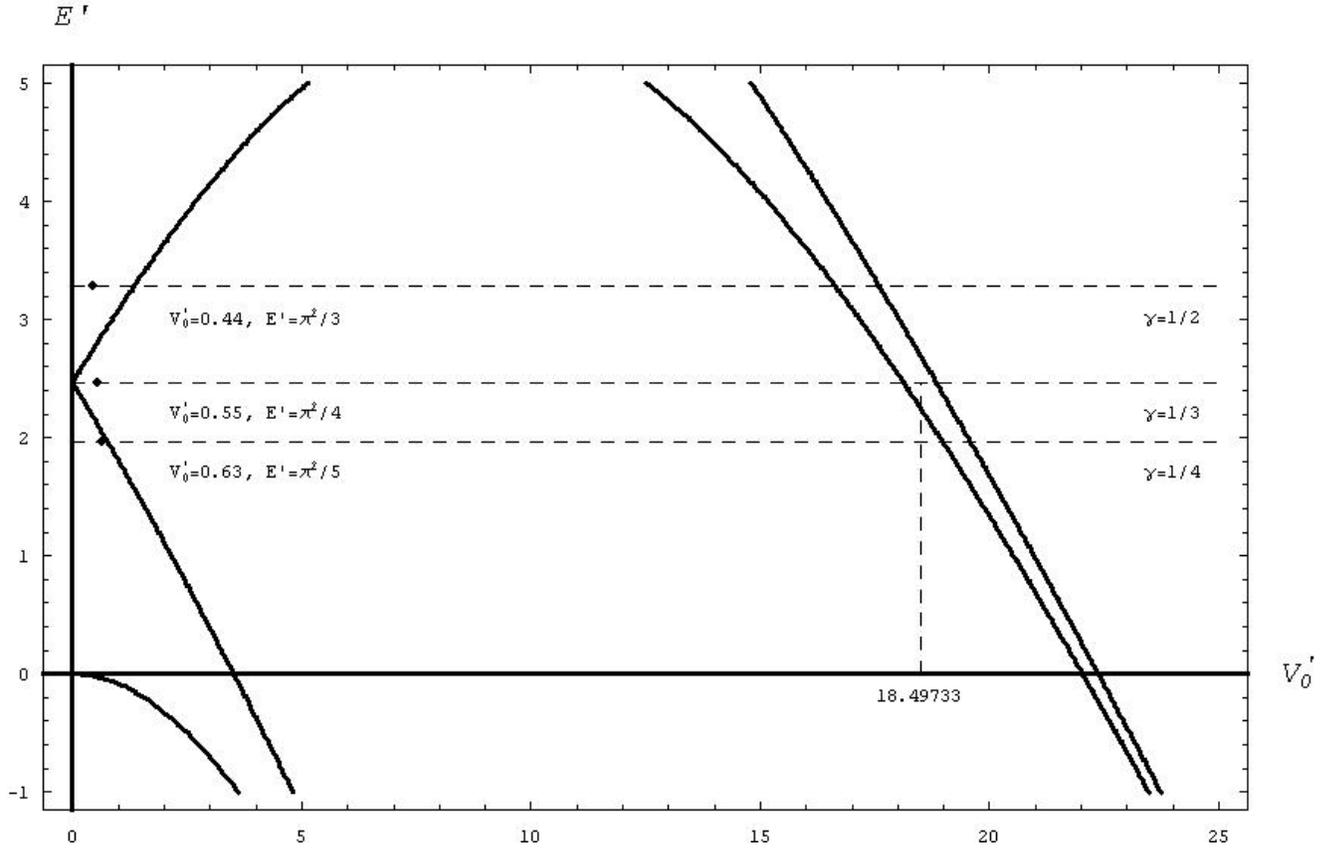


Figura 4. Ampliación de la Fig.3(b) mostrando el detalle de la región en torno a $E' = (\pi/2)^2$ y valores pequeños de V_0' . Las líneas horizontales segmentadas representan (de arriba hacia abajo) a los valores del parámetro “clásico” γ de las Figs.2(c), (a), (d); dichos valores corresponden, en el problema cuántico, a los puntos mostrados: el primero y el tercero reflejan un estado metálico y el segundo un estado aislante.

de obtener la “función traza” $S(E', V_0')$ dependiente de las variables adimensionales $E' \equiv (mL^2/2\hbar^2)E$ y $V_0' \equiv (mL^2/2\hbar^2)V_0$. El resultado es

$$S(E', V_0') = 2 \cos \sqrt{E' + V_0'} \cos \sqrt{E' - V_0'} - \frac{2E'}{\sqrt{E'^2 - V_0'^2}} \sin \sqrt{E' + V_0'} \sin \sqrt{E' - V_0'} \quad (13)$$

de tal forma que la condición $S(E', V_0') = \pm 2$ define las curvas separatrices que dividen las zonas de estabilidad de las zonas de inestabilidad (Fig.3(b)). Para los efectos que interesan en este trabajo, los valores de E' y V_0' son suficientemente pequeños y comprenden la zona entre las primeras dos “lenguas” cerca del eje vertical. Como se puede ver, en esta zona la similitud entre las Figs.3(a) y (b) (girada esta última $\pi/2$ en el sentido antihorario) es suficientemente buena. Esto significa que alrededor de $\gamma = 0$ (Fig.3(a)) las curvas separatrices entre las primeras dos “lenguas” de estabilidad se aproximan a las dos rectas $\gamma = \pm(2\lambda - 1/2)$; si se traslada este resultado a los ejes $E' - V_0'$ asociados a (11) se obtiene $E' = (\pi/2)^2 \pm V_0'/2$. Ello se compara al desarrollo en series de (13) en torno a $E' = (\pi/2)^2$ y $V_0' = 0$ que da por resultado la ecuación $E' = (\pi/2)^2 \pm (2/\pi)V_0' \cong (\pi/2)^2 \pm 0,64V_0'$

para dichas rectas separatrices, y esto es lo que se observa en la Fig. 4.

En la teoría del estado sólido, el potencial constante por tramos dado en (12) constituye el modelo de Krönig-Penney. Al elegir un valor fijo de V_0' en la Fig.3(b), vemos que existen zonas continuas de valores “permitidos” de E' para los que se tiene soluciones acotadas de la función de onda cuántica $\Psi(x)$; entre dos zonas “permitidas” están las zonas “prohibidas” de valores de E' . Esta imagen corresponde justamente al modelo unidimensional de bandas (zonas permitidas) y brechas (zonas prohibidas) usual en los libros de texto (ver, por ejemplo, Mermin-Ashcroft [14] o Gasiorowicz [16]). Formalmente, se dice pues que los valores “permitidos” de E en (11) constituyen el espectro (o conjunto resolvente) del hamiltoniano cristalino asociado a un potencial periódico.

4. EL PÉNDULO ELÁSTICO CLÁSICO VISTO COMO UN PROBLEMA CUÁNTICO CRISTALINO

En vista de la analogía matemática de los problemas clásico y cuántico ya referidos a través de las ecs.

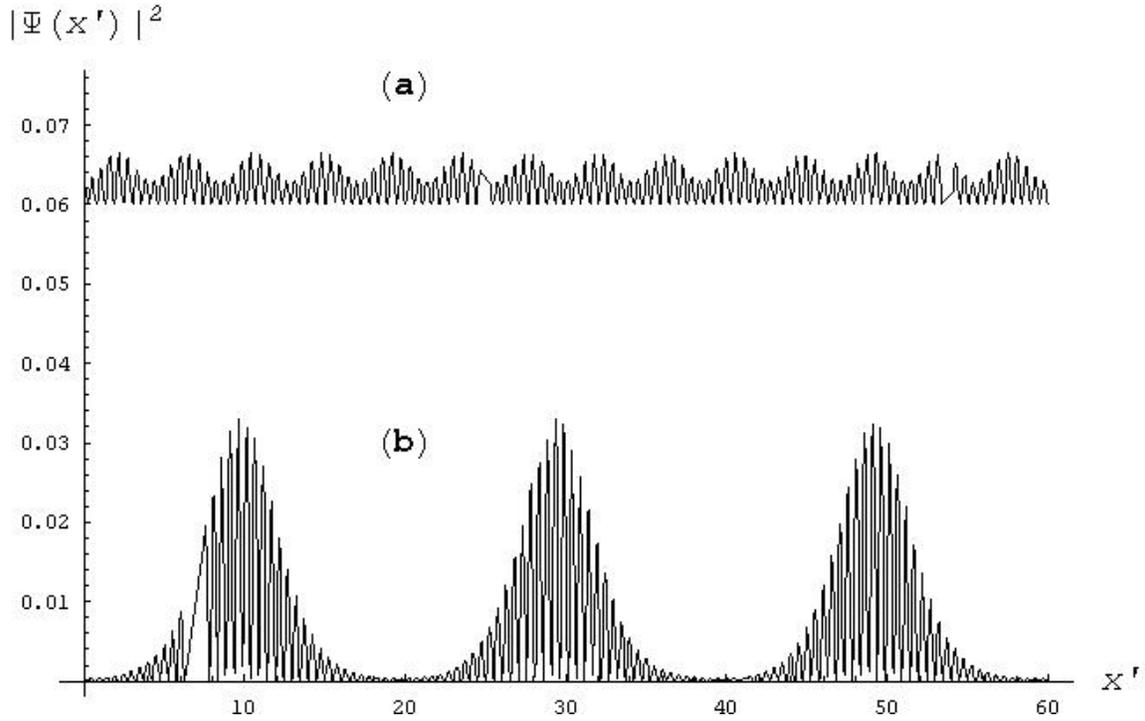


Figura 5. Diagramas de densidad de probabilidad cuántica $|\Psi(x')|^2$ para: (a) el estado metálico ($\gamma = 1/2$) y (b) el estado aislante ($\gamma = 1/3$) de la Fig.4. Para efectos de comparación con (b), el gráfico en (a) se reescaló según $0,06 + 10|\Psi(x')|^2$, pues de otro modo éste es apenas perceptible.

(10) y (11) respectivamente, examinaremos a continuación las consecuencias del fenómeno de resonancia 2:1 del péndulo elástico, en el contexto del problema cuántico cristalino. ¿Qué significa pues la condición de resonancia $\omega_r = 2\omega_p$ al aplicarse a (11)? Bien, esto se traduce en (11) como un valor de $E' = (\pi/2)^2 \cong 2,4674$. Este valor se puede obtener como parte de un resultado más general: de acuerdo a la teoría de sistemas dinámicos [4], las soluciones de (10) son inestables siempre que $\omega_r = (2/n)\omega_p$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, lo que traducido al problema cuántico en (11) significa $E' = (n\pi/2)^2$. Estos valores de E' son muy particulares en la Fig.4 pues corresponden a las soluciones de $S(E', 0) = \pm 2$ de acuerdo a (13), esto es, los puntos de intersección de las “lenguas” de estabilidad con el eje vertical $V'_0 = 0$. De acuerdo a Olsson [4], solamente el valor $n = 1$ tiene sentido físico, por lo que examinaremos la vecindad de la recta $E' = (\pi/2)^2$ y el eje vertical $V'_0 = 0$ en la Fig.4; para ello se amplió esta zona de la Fig.3(b).

Recordemos que en la simulación de la Fig.2(a), se tiene $r(t)$ y $\phi(t)$ para la condición de resonancia $\omega_r = 2\omega_p$ o, de manera equivalente, $\gamma = 1/3$. A partir de esto, se puede construir la simulación de la proyección horizontal $x(t) \propto \sin \phi(t)$ en (10) y luego $x(t)^2 \propto \sin^2 \phi(t)$. En vista de la analogía entre (10) y (11), el gráfico de $x^2(t)$ corresponde a la función cuántica de densidad de probabilidad $|\Psi|^2$. Esto es lo que se muestra en la Fig.5(b), mientras que en la Fig.5(a) la magnitud de la función $|\Psi|^2$ nunca crece apreciablemente, y por ello se la tuvo

que ampliar para compararla con (b) en el mismo gráfico. Lo anterior tiene una interpretación física interesante: en la Fig.5(b) se tiene una distribución casi-discreta de zonas de mayor densidad de carga, lo que significa que allí los portadores de carga se localizan y por lo tanto el cristal unidimensional se comportaría como un aislante eléctrico. Esta afirmación obedece a un criterio más bien cualitativo, pues las zonas de mayor densidad de carga eléctrica ($\rho = -e|\Psi|^2$) están claramente separadas entre sí, lo que se puede asociar a una integral de solapamiento muy pequeña y, en consecuencia, a un estado aislante (esto se ilustra muy bien en la deducción de la teoría de bandas a partir del modelo de enlace fuerte [14]). Dichas zonas de localización surgen como resultado de una simulación numérica, en completa consistencia con la condición de resonancia clásica $\gamma = 1/3$ que corresponde a la recta $E' = (\pi/2)^2$ en el diagrama de estabilidad de la Fig.4. Como se ve, para valores pequeños de V'_0 , esta recta nunca pasa por bandas o zonas permitidas, por lo que el cristal siempre se comportaría como un aislante eléctrico. El valor $V'_0 = 0,55$ que se indica en esta figura corresponde al régimen de la Fig.5(b) que sugiere dicho estado aislante. Solamente para este valor particular de E' independientemente del valor de V'_0 se tendría siempre un estado aislante, mientras que para otros valores de E' , a medida que V'_0 aumenta, se pasa de un estado metálico a uno aislante. Por otra parte, en la Fig.5(a), se tiene una distribución prácticamente uniforme de la densidad de probabilidad $|\Psi|^2$, lo que significa que los portadores de carga están deslocalizados de manera uniforme a lo largo

del cristal, y por lo tanto pueden conducir electricidad. Esto sucede para $\gamma = 1/2$, que corresponde a la recta $E' = \pi^2/3 \cong 3,2898$. Como se ve en la Fig.4, para valores pequeños de V'_0 dicha recta pasa por una región de estabilidad (banda), lo que significa que el cristal se comportaría como un conductor eléctrico. El valor $V'_0 = 0,44$ que se indica en esta figura corresponde al régimen de la Fig.5(a) que sugiere dicho estado metálico; consistentemente, vemos que el punto $V'_0 = 0,44$ se halla dentro de una región de estabilidad. De manera similar, el punto $E' = \pi^2/5$, $V'_0 = 0,63$, también refleja un estado metálico que corresponde al modo longitudinal simulado en la Fig.2(d). Un punto en particular que llama la atención en la Fig.4 es $E' = \pi^2/4$, $V'_0 = 18,49733$, que al encontrarse dentro de una “lengua” de estabilidad indicaría un estado metálico. Pero este no es el caso, pues dicho punto indicaría que $r(t) = (r_0 + mg/K)(1 + 2,5 \cos \Omega t)$ en el problema clásico, y ésta no es una solución válida de las ecs. (6) y (7) al no estar comprendida en el régimen de pequeñas oscilaciones, i.e., $2,5|\cos \Omega t|_{max} > 1$ (con Ω la frecuencia angular del modo longitudinal).

Desde el punto de vista físico, el conjunto de los valores permitidos de E' tales que $|S(E', V'_0)| \leq 2$ en (13) constituyen las bandas o intervalos energéticos que, para los metales, contienen a la energía de Fermi ε_F ; ésta se calcula como una función de la densidad de átomos n . Por otra parte, los intervalos de valores prohibidos de E' constituyen las brechas (*energy gaps*) de tal forma que para los aislantes, la densidad de átomos n conduce a un valor correspondiente de E' que se encuentra dentro de una de estas brechas, siendo el ancho de la brecha suficientemente grande como para inhibir la promoción de portadores entre bandas contiguas, por ejemplo, por absorción de fotones térmicos. Debe aclararse que el modelo de cristal unidimensional supuesto en este trabajo conduce a resultados que pueden ser bastante diferentes de los de un caso real en tres dimensiones; por ejemplo, la energía de Fermi en el modelo unidimensional es proporcional al cuadrado de la densidad lineal de átomos: $\varepsilon_F \propto n^2$, mientras que en tres dimensiones se sabe que $\varepsilon_F \propto n^{2/3}$, con n igual a la densidad volumétrica de átomos. No obstante, algunos autores [16] [14] aún consideran que la teoría de bandas en una dimensión es lo suficientemente pedagógica como para dilucidar varios aspectos cualitativos esenciales de la dinámica electrónica en cristales o —recientemente— en hetero-estructuras de semiconductores [11] [12].

Como una conclusión general de este trabajo se puede decir que, dentro de las aproximaciones supuestas, para una densidad lineal de átomos arbitraria n , cuando crece la altura V_0 de las barreras de potencial en (12) a partir de valores pequeños (Fig.4), entonces generalmente se pasa de un estado metálico a un estado aislante, excepto cuando $n \propto \sqrt{E'} = \pi/2$, en cuyo caso siempre se tiene un estado aislante para cualquier valor de V_0 (⁴). Ciertamente V_0 no suele ser un parámetro que se pueda controlar experimentalmente a voluntad, pues depende

esencialmente de la naturaleza química del cristal, pero la suposición de V_0 variable puede tomarse —en este trabajo— como una buena oportunidad de realizar un ejercicio pedagógico interesante, por ejemplo, suponiendo, de manera equivalente, un ancho de brecha E_g variable, pues como se ve en la Fig.4, $E_g \propto V_0$.

REFERENCIAS

- [1] Figueroa D. *et al.*; *Laboratorio de Física I*, p.1-06.7, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela (Equinoccio, 2000).
- [2] Vitt A., Gorelik G.; *Swinging of an elastic pendulum as an example of two parametrically coupled linear oscillation systems*, J. Tech. Phys. **3**, 2-3, 294 (1933).
- [3] Lynch P.; *The swinging spring: a simple model of atmospheric balance*, Geometric Methods and Models (vol.II): Large Scale Atmosphere Ocean Dynamics (Norbury J., Roulstone I., eds., Cambridge Univ. Press, 2002).
- [4] Olsson M.G.; *Why does a mass on a spring sometimes misbehave?*, Am. J. Phys. **44**, 12, 1211 (1976).
- [5] Cayton T.; *The laboratory spring-mass oscillator: an example of parametric instability*, Am. J. Phys. **45**, 8, 723 (1977).
- [6] Falk L.; *Recurrence effects in a parametric spring pendulum*, Am. J. Phys. **46**, 11, 1120 (1978).
- [7] Sanjinés D.; *Ecuación unidimensional de Schrödinger como un problema dinámico clásico*, Revista Boliviana de Física **8**, 1 (2002); Rev. Mexicana de Física **36** (S1), 181 (1990).
- [8] Arnold V.I.; *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, 1978).
- [9] Bender C., Orszag S.; *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, International Series in Pure and Applied Mathematics (McGraw-Hill, 1978).
- [10] Magnus W., Winkler S.; *Hill's Equation*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics vol. 20 (Wiley, 1966).
- [11] Mendez E., Bastard G.; *Wannier-Stark ladders and Bloch oscillations in superlattices*, Phys. Today (Junio, 1993).
- [12] Bouchard A., Luban M.; *Bloch oscillations and other dynamical phenomena of electrons in semiconductor superlattices*, Phys. Rev. B **52**, 7, 5105 (1995).
- [13] Lyssenko V. *et al.*; *Direct measurement of the spatial displacement of Bloch-oscillating electrons in semiconductor superlattices*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2, 301 (1997).
- [14] Ashcroft N.W., Mermin N.D.; *Solid State Physics* (Saunders College, 1976).
- [15] BenDaniel D.J., Duke C.B.; Phys. Rev. **152**, 683 (1966).
- [16] Gasiorowicz S.; *Quantum Mechanics* (Course of Theoretical Physics, vol. 3, Pergamon Press, 1977).

⁴Si se convierte los valores de E' y V'_0 para este estado en unidades físicas, ello corresponde aproximadamente a 38 eV para la “altura” de mitad de brecha y 12 eV para el ancho de brecha E_g ; este último valor es consistente con los valores típicos $E_g > 2$ eV para la mayoría de los aislantes.

ALGUNAS CARACTERÍSTICAS METEOROLÓGICAS DE LA LOCALIDAD DE TAMBO QUEMADO – BOLIVIA

R. Torrez , F. Ghezzi, E. Palenque ⁽¹⁾
J. Egger, J. Reuder , J. Sweeden ⁽²⁾

¹Laboratorio de Física de la Atmósfera
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz, Bolivia

²Instituto de Meteorología de Munich
Universidad de Munich
Munich, Alemania

RESUMEN

En el marco del proyecto “Circulación Atmosférica sobre el Altiplano Andino”, en plena ejecución, entre investigadores del Meteorological Institute of Munich (MIM) de la Universidad de Munich, y del Laboratorio de Física de la Atmósfera (LFA) de la UMSA, se esta realizando el análisis de las series temporales de las estaciones meteorológicas instaladas en las regiones de transición entre altiplano y tierras bajas. El presente artículo, es solo una prospección de las características climáticas de la región de Tambo Quemado, con el objeto de describir y modelar su comportamiento en relación al clima altiplánico.

La localidad de Tambo Quemado corresponde al Departamento de Oruro, y se encuentra al oeste del país, justo en la línea fronteriza entre la republica de Bolivia y la república de Chile, está situado a $18^{\circ}16'62''S$ y $69^{\circ}00'34''$, y a una altitud de $4400msnm$. El periodo de análisis corresponde a la temporada primavera-verano del año 2003. En este trabajo se presenta un análisis del comportamiento de la temperatura, la variabilidad de la humedad relativa, los flujos de viento, la alta incidencia de la radiación solar y las relaciones entre ellas.

1. INTRODUCCIÓN

El proyecto “Circulación atmosférica sobre el Altiplano Andino”, tiene su origen el año 2000, con la visita del Prof. J. Egger del Instituto de Meteorología de la Universidad de Munich. El año 2003 se ejecuta el proyecto, con una gran campaña de mediciones, en diferentes lugares del país. Entre ellos, la localidad de Tambo Quemado. Asimismo, se instalan en dichos lugares, estaciones meteorológicas para el seguimiento del comportamiento

climático por varios años.

La estación meteorológica de Tambo Quemado consiste de un equipo automático de registro de datos, con gran autonomía de operación y adecuado a las duras condiciones ambientales de esta región. Consta de un sensor de radiación solar Kipp and Zonen, sensores de temperatura y humedad Vaisala, sensores de presión, velocidad y dirección de Viento Fischer, así como sistema de adquisición de datos, sistema de potencia y protección,

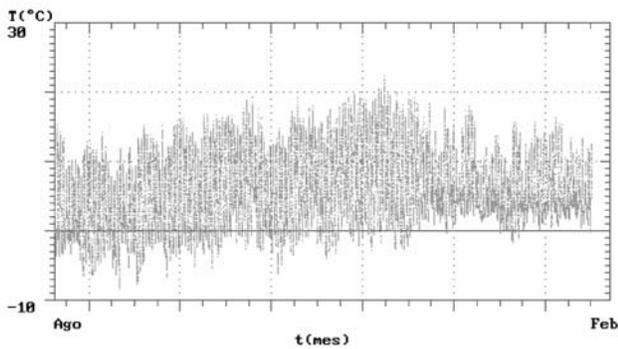


Figura 1. Variación de la temperatura en el periodo primavera-verano del año 2003 en la localidad de Tambo Quemado. Bolivia.

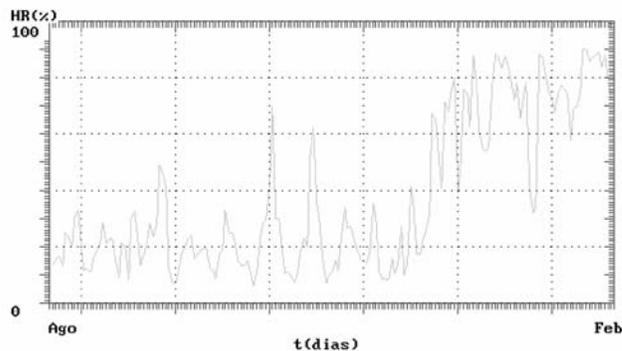


Figura 2. Variación de la humedad relativa a lo largo del periodo de análisis.

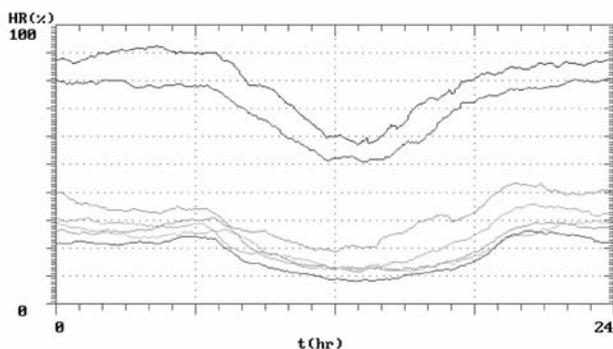


Figura 3. Evolución de la humedad relativa diaria a lo largo de los meses. Las curvas inferiores corresponden a la época seca, mientras que las superiores a la lluviosa.

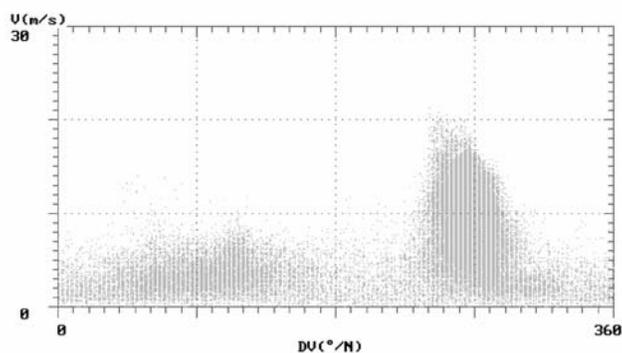


Figura 5. Dirección y velocidad del viento en Tambo Quemado. Se observan dos flujos predominantes.

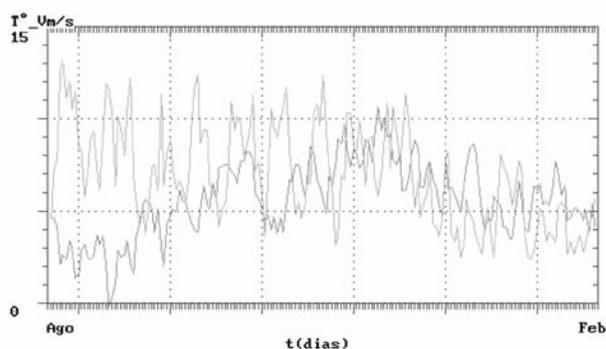


Figura 4. Variación de la velocidad promedio diario del viento (curva sup.). Se puede observar que se reduce notablemente hacia el final de la serie.

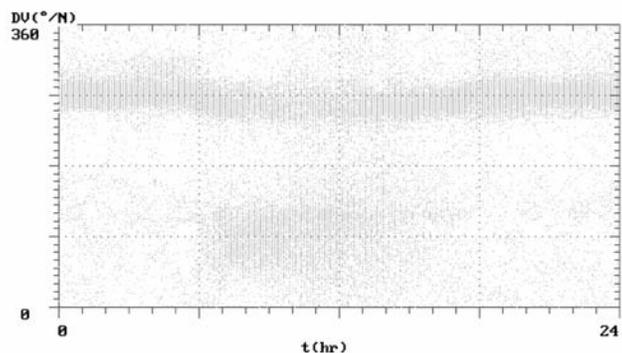


Figura 6. Dirección del viento a lo largo del día. Se observa que la velocidad mas frecuente tiene también dirección constante.

estructura de soporte y control, de la misma compañía.

El objetivo del proyecto es; establecer la interacción de la atmósfera altiplánica con las corrientes tropicales a ambos lados de las cordilleras. Para este propósito, se han instalado una serie de estaciones meteorológicas en los principales pasos de montaña entre estas regiones, para el seguimiento de las variables climáticas a lo largo de un periodo de cinco años, adicionalmente se han realizado mediciones del perfil atmosférico sobre el lugar con el lanzamiento de globos, sondeo de temperatura, vientos y humedad con aviones de aeromodelismo, y mediciones en tierra a intervalos de una hora aproximadamente.

El paso montañoso de la localidad de Tambo Quemado, se sitúa sobre el fondo oeste del altiplano orureño, entre medio de los volcanes Payachata y Huallatiri, a aproximadamente 250km al sud-oeste de la ciudad de La Paz. La zona presenta escasa cobertura vegetal, ríos de curso solo estacionales, y cielos claros y limpios durante la mayor parte del año.

2. LAS SERIES TEMPORALES DE DATOS

Los datos obtenidos para esta región presentan en general una marcada regularidad por periodos de tiempo, por ejemplo, la temperatura aumenta paulatinamente desde un valor promedio de 3°C en agosto hasta un

valor promedio de 10°C en diciembre, desde donde desciende irregularmente hasta los valores inicialesde (fig. 1).

En cuanto se refiere a la humedad, la región de Tambo Quemado es críticamente seca, con una humedad promedio en invierno y primavera de alrededor del 20%, que se mantiene con ligeras fluctuaciones hasta diciembre, sin embargo en la época de lluvias, la humedad se incrementa rápidamente hasta valores superiores al 80% (fig. 2).

La sequedad ambiental se refleja también notablemente a lo largo de los días. La figura 3 muestra como la humedad varía entre el día y la noche en un 15% aproximadamente en los meses secos, ampliándose hasta 30 y 40% en los meses de lluvia.

En cuanto al régimen de viento, se observa que su flujo es considerable en la época seca, o sea, al principio de la primavera, observándose un decrecimiento notable al final del verano como se observa en la figura 4. Con respecto al comportamiento diario, la velocidad del viento alcanza sus máximas valores alrededor de las 4 de la tarde, luego del cuál decrece paulatinamente durante la noche hasta alcanzar sus valores mínimos aproximadamente a las 9 de la mañana del día siguiente.

El flujo de viento tiene básicamente dos direcciones

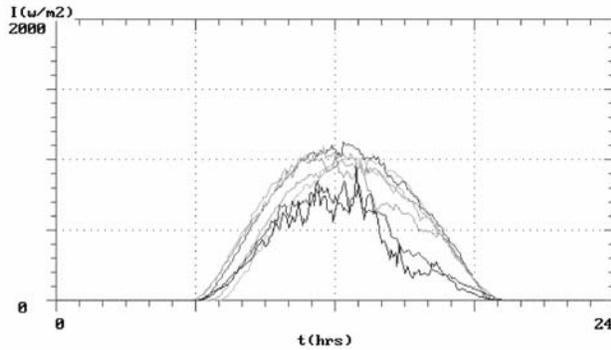


Figura 7. Evolución de la intensidad de radiación solar desde el inicio de la serie de datos. Se puede observar las distorsiones de la curva típica durante el verano.

predominantes, la primera y mas frecuente se origina en el lado de la costa y se mueve con dirección al este, o sea, hacia el altiplano boliviano (fig. 5). El viento de ésta dirección es más intenso y más regular durante la noche, sin embargo en el día es perturbado por el flujo diurno del altiplano en sentido contrario. Esta peculiar característica nos permite vincular esta corriente de aire a efectos sinópticos de la circulación general atmosférica [1].

El flujo altiplánico diurno de este a oeste, es típicamente térmico, es decir; tiene origen en el calentamiento del aire altiplánico que da lugar a un gradiente de presión hacia el oeste. Este viento que tiene igual o mayor intensidad que el viento sinóptico, ‘colisiona’ con este dando lugar a una disminución neta de la velocidad y a un cambio brusco de dirección. Es decir: da lugar a corrientes turbulentas más dispersas y con menores o iguales velocidades instantáneas que el flujo estacionario, y que se manifiestan desde las primeras horas de la mañana hasta el final de la tarde

En lo que se refiere a la intensidad de la radiación solar, ésta alcanza valores notablemente elevados en esta región, especialmente en la primavera, debido a su cielo limpio y claro (fig. 7). Durante el verano o época lluviosa, la presencia de las nubes distorsiona la curva de radiación solar, especialmente por las tardes.

Los valores significativamente altos de la velocidad del viento y de la radiación solar, hacen interesante la posibilidad de su aprovechamiento, teniendo en cuenta que los valores obtenidos corresponden a una superficie pasiva, o que fueron obtenidos a poca altura sobre el suelo.

La figura 8 presenta la evaluación de las energías solar y eólica pasiva acumulada diaria, a pocos metros del suelo, y por unidad de área del colector o sistema [2]. Para el caso del viento, en la evaluación de su energía, se ha estimado la densidad del aire en aproximadamente la mitad de su valor a nivel del mar. En la gráfica se puede ver la alta y creciente incidencia de la energía solar durante la primavera con valores promedio superiores a los 25 MJ por día. Sin embargo, iniciado la época lluviosa,

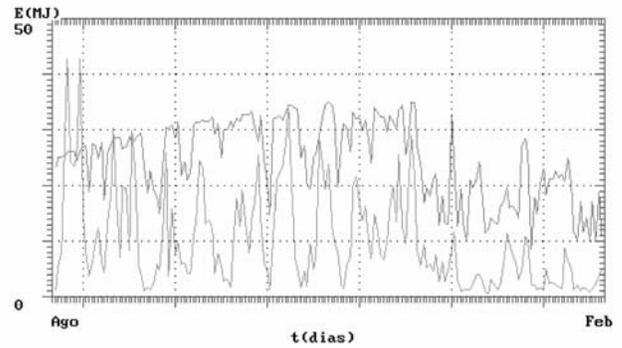


Figura 8. Disponibilidad de energía diaria. La curva superior corresponde a la energía solar, y la inferior a la energía eólica. Se puede observar la reducción de ambas durante el verano.

esta disponibilidad de energía se reduce notablemente, hasta alrededor de 10 MJ.

En cuanto a la energía eólica, este se observa más variable en el corto periodo, pero se muestra más estable en el largo periodo con un promedio mensual aproximado a los 15 MJ por día.

Dado que en la región de Tambo Quemado se tiene un largo periodo seco, la gran disponibilidad de energía en este periodo puede bien aplicarse para bombeo de agua, o alternativamente para producción de energía eléctrica, que supliría en gran medida al empleo de biomasa como combustible para las actividades domésticas de los pobladores de la región.

En cuanto se refiere a la intensidad de la radiación solar, los máximos alcanzados durante los meses de invierno y primavera son significativamente altos para fines de aprovechamiento energético, como se ha explicado anteriormente, pero asimismo, bastante peligrosos para la exposición prolongada a esta radiación, en vista de la componentes de radiación ultravioleta que conllevan, especialmente del tipo B [3].

3. CONCLUSIONES

Aclarando debidamente que este análisis es parcial y preliminar, debido a que el proyecto contempla un estudio global de todas las estaciones y por lo menos con 3 años de datos. Las conclusiones que se extraen a continuación tienen solo carácter indicativo:

- La humedad relativa presenta dos estaciones bien definidas, seca y lluviosa.
- La temperatura presenta una notable regularidad con un margen de variación de pocos grados centígrados entre ambos periodos.
- En cuanto al flujo de viento, presenta un régimen sinóptico diario bien definido, alterado por condiciones del entorno próximo, especialmente del altiplano. Como fuente de energía puede ser significativo su aprovechamiento.

- La radiación solar como energía es notablemente alta en el primer periodo y no significativo en el segundo. Para fines de salud puede resultar peligroso prolongadas exposiciones al sol.

REFERENCIAS

- [1] Salby M. Fundamentals of Atmospheric Physics, Academic Press, New York, 1995.
- [2] Iqbal, M. Introduction to Solar Radiation, Academic Press, New York, 1986; GTZ, Wind Energy, Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.
- [3] Zaratti, F. y Forno, R. La Radiación Ultravioleta en Bolivia, LFA & OPS, La Paz, 2004.

INFLUENCIA DEL RUIDO EN LA SINCRONIZACIÓN DE DOS OSCILADORES FOTOCONTROLADOS

G. M. Ramírez¹, J. L. Guisset², J. L. Deneubourg³

¹Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés. Casilla 8635 La Paz - Bolivia

^{2,3}Centre for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine CP231, Bld. du Triomphe. Bruselas - Bélgica.

RESUMEN

Se estudia la influencia de ruidos uniforme y Gaussiano en un sistema de dos osciladores fotocontrolados (LCOs) acoplados. Se analizaron tres situaciones diferentes: la primera involucra dos LCOs desacoplados pero afectados por ruido; la segunda, un LCO que actúa como “maestro” del otro; y la tercera, en que ambos LCOs pueden influenciarse. Se observa que el ruido puede inducir desincronización o sincronización dependiendo de las características de los LCOs y del ruido que actúa sobre estos osciladores.

1. INTRODUCCIÓN

La sincronización es un fenómeno bastante común que se presenta en osciladores no lineales acoplados o en osciladores que son conducidos por fuerzas externas que dependen del tiempo. Un LCO es un oscilador de relajación y auto-sostenido [1][2]. En un sistema de dos LCOs [3], se entiende la sincronización como un ajuste de ritmos de los osciladores acoplados, lo que da lugar a un enganche de fases⁴ $\Delta\phi_{ij} = \text{constante}$ ⁵ y trabajando en condiciones tales que las perturbaciones naturales fueron minimizadas lo que permitió postular un modelo que se adapta bien a los resultados experimentales. Pero muchas veces, las perturbaciones son inevitables y es importante saber tratarlas ya que estas fluctuaciones pueden modificar sustancialmente el comportamiento del sistema [4][5]. En este trabajo se analiza el caso en el que los osciladores están influenciados por un ruido delimitado (uniforme) en un amplio intervalo y también por un ruido Gaussiano con varianzas σ_i^2 . Consideramos que el ruido actúa sobre la fuente de voltaje, situación, que de acuerdo con las características de los LCOs, causa cambios en la amplitud de la señal de los mismos; en tanto que para los osciladores libres de ruido la amplitud permanece constante. El artículo está estructurado de la siguiente manera: en §2, se explican las ecuaciones del modelo en presencia de ruido, así como las definiciones de base para la caracterización de la sincronización; en §3, se detallan los tres tipos de sistema estudiados cuando un ruido uniforme actúa sobre ellos. en §4, se presentan los resultados de la acción de ruidos Gaussianos sobre un sistema de LCOs mutuamente acoplados. Finalmente, en §5, se dan las conclusiones de este estudio.

2. MODELO

Basados en las ecuaciones del modelo presentado para LCOs sin ruido [3], se plantean las ecuaciones cuando el sistema de LCOs está influenciado por ruido uniforme:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} &= \lambda_i[(V_{Mi} + (1 - 2\zeta_i(t))\sqrt{D}) - V_i(t)]\epsilon_i(t) \\ &\quad - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{i,j}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)]; \\ &\quad i, j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\zeta_i(t)$ es un número aleatorio escogido de una distribución uniforme en el intervalo $[0,0, 1,0]$. Así, el ruido uniforme está dado por $(1 - 2\zeta_i(t))\sqrt{D}$ definiéndose los umbrales inferior y superior en una distribución uniforme de acuerdo con el valor \sqrt{D} . Por otro lado, cuando la influencia es debida a un ruido Gaussiano, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} &= \lambda_i[(V_{Mi} + \xi_i(t)\sqrt{D}) - V_i(t)]\epsilon_i(t) \\ &\quad - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{i,j}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)]; \\ &\quad i, j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

y en este caso, $\xi_i(t)$ representa nuevamente un número aleatorio escogido de una distribución normal con media cero y con varianza σ_i^2 . El término de ruido $\xi_i(t)\sqrt{D}$ está determinado por la varianza del ruido σ_i^2 . En (1) y (2), el estado del oscilador $\epsilon_i(t)$ está definido por

$$\begin{aligned} \epsilon_i(t) &= 1 \quad \text{LCO apagado} \quad (\text{carga}) \\ \epsilon_i(t) &= 0 \quad \text{LCO encendido} \quad (\text{descarga}). \end{aligned}$$

Al mismo tiempo, definimos la fase instantánea de un LCO (p. ej. LCO_i) como una función de los instantes de encendido de los otros LCOs (p. ej. LCO_j) de acuerdo con el método del mapa de Poincaré [7][8][9]. Esta definición de la fase conduce a un resultado correcto ya sea

¹e-mail: gramirez@ulb.ac.be

²e-mail: jlguisse@ulb.ac.be

³e-mail: jldeneub@ulb.ac.be

⁴El término enganche de fases es más conocido en la literatura como phase-locking.

⁵aún cuando esta definición no incluye algunos fenómenos no triviales.

que las oscilaciones sean puramente periódicas o estén afectadas por ruido [6].

$$\phi_i(t) = 2\pi \frac{t - t_j^{(k)}}{t_j^{(k+1)} - t_j^{(k)}} + 2\pi k; \quad t_j^{(k)} \leq t \leq t_j^{(k+1)}. \quad (3)$$

Expresiones similares para la fase instantánea pueden escribirse para el LCO_j en términos de los instantes de tiempo $t_i^{(k)}$ en los cuales el LCO_i se enciende.

$$\phi_j(t) = 2\pi \frac{t - t_i^{(k)}}{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}} + 2\pi k; \quad t_i^{(k)} \leq t \leq t_i^{(k+1)}. \quad (4)$$

Bajo esta consideración, se puede definir una diferencia de fase lineal (LPD) entre los osciladores en términos de la diferencia entre los tiempos de encendido de cada LCO, considerando a uno de ellos como el oscilador de referencia:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{ij}^{\text{lineal}} &= \phi_j(t_i^{(k+1)}) - \phi_i(t_i^{(k+1)}) \\ &= 2\pi \frac{t_j^{(k+1)} - t_i^{(k+1)}}{t_j^{(k+1)} - t_j^{(k)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Se debe resaltar que las fases $\phi_{i,j}$ están definidas en todo el eje real. Para la diferencia de fase cíclica (CPD) se puede definir el resultado en un círculo [0 : 1]:

$$\Delta\phi_{ij}^{\text{ciclica}} = \frac{1}{2\pi} [\Delta\Phi_{ij}^{\text{lineal}} \bmod 2\pi]. \quad (6)$$

En nuestros experimentos numéricos, trabajamos con dos osciladores (LCO₁ and LCO₂). Así, las ecuaciones que describen sincronización con observaciones estroboscópicas son:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{12}^{\text{lineal}} &= \phi_2(t_1^{(k+1)}) - \phi_1(t_1^{(k+1)}) \\ &= 2\pi \frac{t_2^{(k+1)} - t_1^{(k+1)}}{t_2^{(k+1)} - t_2^{(k)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

y

$$\Delta\phi_{12}^{\text{ciclica}} = \frac{1}{2\pi} [\Delta\Phi_{12}^{\text{lineal}} \bmod 2\pi]. \quad (8)$$

3. RUIDO UNIFORME

Utilizando (1) se han efectuado simulaciones para estudiar la influencia del ruido uniforme sobre los LCOs. En (1), se puede asociar \sqrt{D} a la intensidad de ruido que se ha hecho variar en el intervalo [0,0, 4,0]. Se han estudiado tres situaciones: la primera está referida al caso en el cual los LCOs no están acoplados; en la segunda, sólo un LCO ejerce influencia sobre el otro; finalmente, en la tercera, los LCOs están mutuamente acoplados.

3.1. Comportamiento de LCOs libres de ruido

Cuando un LCO no es afectado por ruido, su período permanece constante; en este sentido, se espera que la diferencia de fase entre dos LCOs idénticos no acoplados debe también permanecer constante. (Fig. 1(a)). Por

otro lado, cuando los LCOs no son idénticos, el comportamiento es tal que la LPD disminuye o crece dependiendo de los períodos de los LCOs. De la Fig. 1, se puede caracterizar un sistema de LCOs no acoplados por los siguientes hechos:

- La LPD es tal que esta permanece constante aunque no necesariamente cero ($T_{01} = T_{02}$), crece ($T_{01} < T_{02}$) o disminuye ($T_{01} > T_{02}$) con una pendiente definida.
- La distribución de la LPD es uniforme (LCOs no idénticos) o es una función δ (LCOs idénticos).
- Los puntos para la CPD están distribuidos sobre líneas bien definidas.
- La distribución de la CPD presenta modos múltiples (LCOs no idénticos) o es una función δ (LCOs idénticos).

Si se considera el efecto de ruido en los sistemas descritos anteriormente, se puede notar que la LPD del sistema de LCOs idénticos se comporta difusivamente realizando un movimiento que recuerda a la marcha aleatoria (Fig. 2(h)) para diferentes valores de la intensidad de ruido (región amplificada en el gráfico); cuando el ruido es suficientemente intenso, la figura que se obtiene nos recuerda a la turbulencias (línea gris oscura en la Fig. 2(h)). Las distribuciones de la LPD y la CPD se muestran en Fig. 2(b)-(g). En lo que concierne a las distribuciones, se puede ver que es mejor trabajar con la diferencia de fase normalizada (cíclica) ya que esto permite caracterizar el sistema de una mejor manera y así evitar interpretaciones confusas. Por ejemplo en el caso de ruidos muy intensos, las distribuciones de LPD muestran un cuadro unimodal pero esto no significa que un valor definido de la LPD es más probable, es solamente el efecto de que la LPD cae difusivamente en el tiempo. Por el contrario, las distribuciones de CPD muestran un comportamiento estocástico del sistema que permanecen uniformes aún para ruidos más intensos. Por consiguiente, la distribución de la CPD será una de nuestras principales herramientas para analizar sistemas de LCOs.

3.2. Un LCO conduce a otro (maestro-esclavo)

Para esta situación, se ha utilizado para el LCO₁, los mismos valores de parámetros que en §3.1, y se ha considerado al LCO₂ como el LCO maestro en el sentido que éste puede actuar sobre el LCO₁ pero no recibe ninguna influencia del mismo.

En el caso en que un LCO conduce a otro, se puede esperar un comportamiento síncrono si los LCOs no son muy diferentes y la influencia ruidosa que reciben del medio es despreciable.

Cuando los LCOs son idénticos, se observa que la sincronización sólo puede producirse cuando la intensidad de ruido es nula, es decir, cualquier ruido -por más pequeño que éste sea- destruirá el régimen síncrono (Fig. 3(a)). Por otro lado, cuando los LCOs son diferentes, la región de sincronización se mantiene cuando

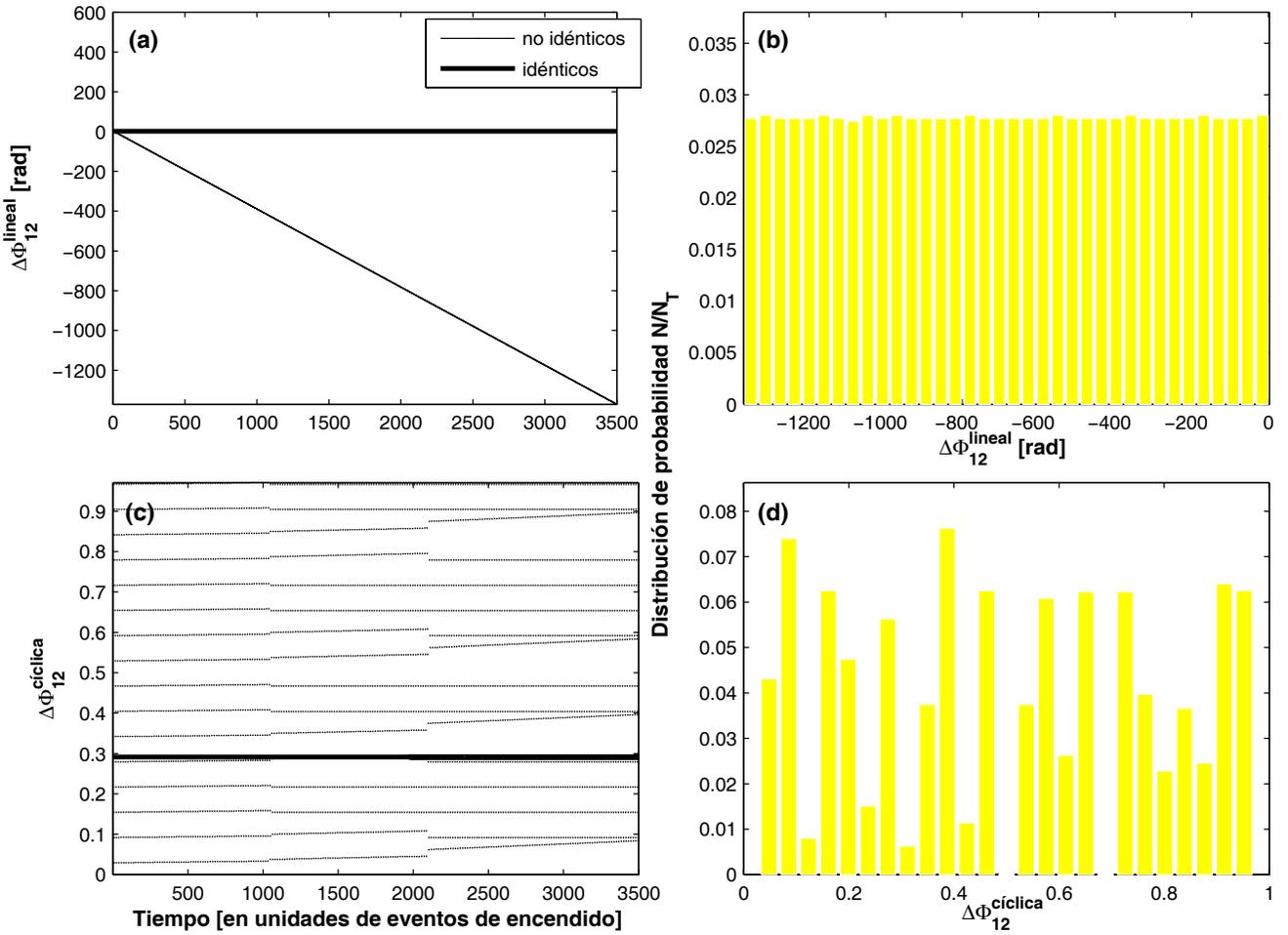


Figura 1. Características de un sistema de dos LCOs no acoplados con períodos $T_{01} = T_{02} = 34,0$ ms, correspondientes a los valores de parámetros $C = C_1 = C_2 = 0,47\mu\text{F}$, $R_\gamma = R_{\gamma 1} = R_{\gamma 2} = 1,6$ k Ω , $R_{\lambda 1} = R_{\lambda 2} = 101,165$ k Ω (línea gruesa), y $T_{01} = 34,0$ ms, y $T_{02} = 32,0$ ms con valores de los parámetros $R_{\lambda 2} = 95,026$ k Ω (línea delgada). Se toma la evolución sobre $N_T = 3500$ eventos de encendido. (a) Evolución de la LPD de los LCOs. (b) Distribución de la LPD de los LCOs. (c) Evolución de la CPD de los LCOs. (d) Distribución de la CPD para osciladores no idénticos.

la intensidad de ruido es débil como se muestra en la Fig. 3(b). En este gráfico se puede ver que el régimen síncrono “resiste” mejor a la influencia del ruido cuando los LCOs son más diferentes, es decir, mientras mayor sea la diferencia entre ellos, más grande será la región de sincronización pero la región de transición se vuelve también más ancha. Es evidente que lo anterior sólo es válido cuando las características de los LCOs son tales que sus valores están comprendidos en la lengua de Arnold (ver [10]); de otra manera, no podemos referirnos a sincronización propiamente dicha.

3.3. LCOs acoplados

En éste caso, los LCOs tienen la misma jerarquía y se utilizan los mismos valores de parámetros que se usaron anteriormente para el LCO₁. Primeramente, se analiza la situación en la cual los LCOs son idénticos. En la Fig. 4(a) se representa la varianza de la CPD como

una función de la intensidad de ruido y los gráficos de la parte superior de la figura son las evoluciones de la LPD para determinados valores de la intensidad de ruido, mientras que los gráficos de la parte inferior corresponden a las distribuciones de CPD para estos valores de \sqrt{D} . Se observa una amplia región de transición en la cual para valores pequeños de la intensidad de ruido ($\sqrt{D} = 0,2$, $\sqrt{D} = 0,4$), la evolución de la LPD permanece alrededor de cero, indicando que la sincronización está aún presente, lo que es confirmado además por la distribución de la CPD que contiene sólo dos picos en los valores extremos del histograma. Para valores moderados ($\sqrt{D} = 1,75$), la evolución de la LPD presenta algunos saltos de fase con regiones casi estables o épocas alrededor de valores múltiplos de 2π ; la dinámica es similar a la de una caminata aleatoria y la distribución de la CPD muestra en cierta medida un proceso de transición. Por otra parte, para valores grandes de la intensidad de

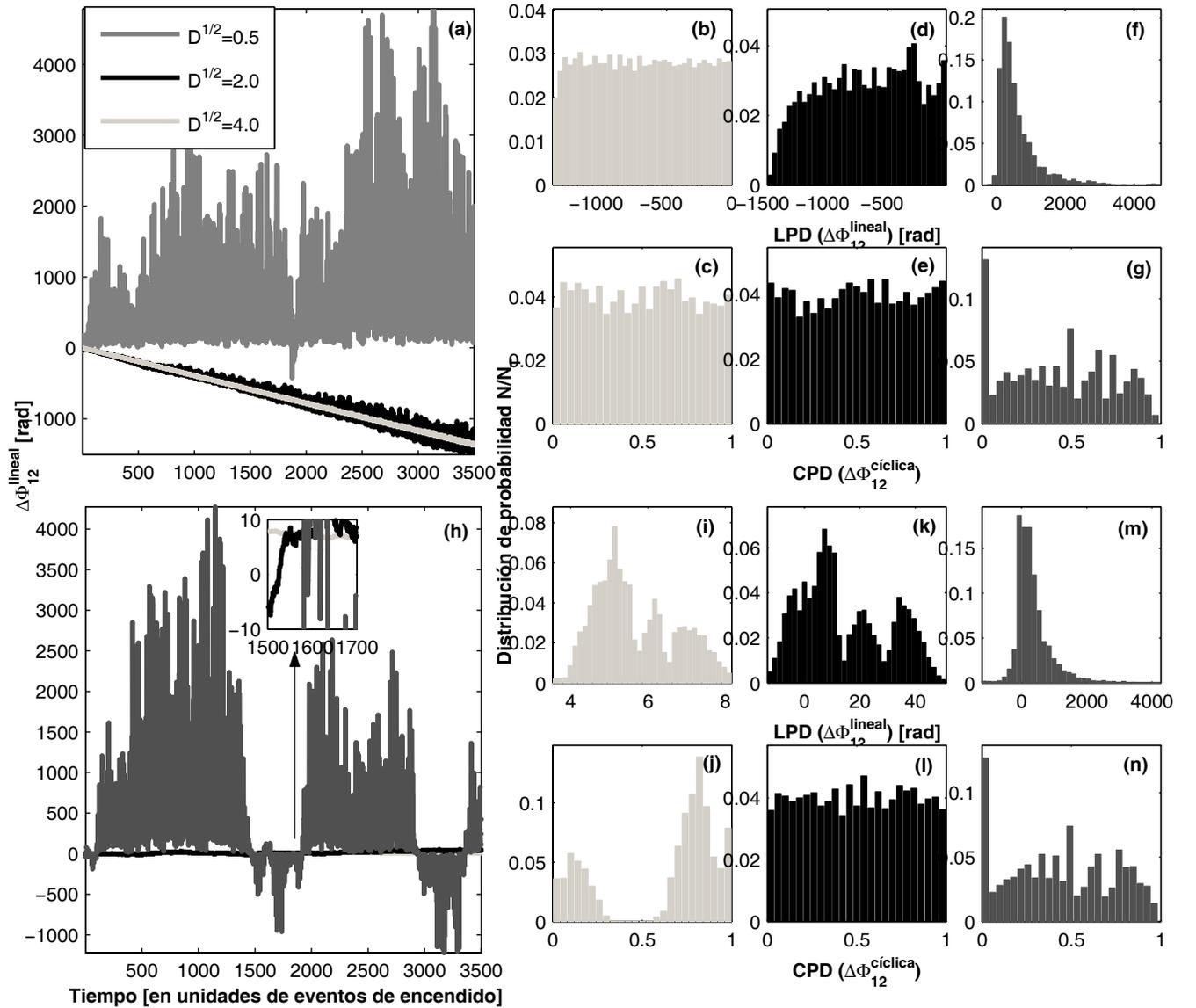


Figura 2. Evoluciones de las LPDs y distribuciones para las LPDs y las CPDs para diferentes intensidades de ruido. El valor de los parámetros usados para los casos de LCOs idénticos y no idénticos son los mismos que los utilizados en la Fig. 1. (a) Evolución de la LPD para LCOs no idénticos. (b), (d), y (f) distribución de $\Delta\Phi_{12}^{\text{lineal}}$ cuando $\sqrt{D} = 0,5$, $\sqrt{D} = 2,5$, y $\sqrt{D} = 4,0$ respectivamente. (c), (e), y (g) Distribución de $\Delta\Phi_{12}^{\text{ciclica}}$ para las mismas intensidades de ruido que en los casos anteriores. (h) Evolución de la LPD para LCOs idénticos. (i), (k), y (m) Distribución de $\Delta\Phi_{12}^{\text{lineal}}$. (j), (l), y (n) Distribución de $\Delta\Phi_{12}^{\text{ciclica}}$.

ruido ($\sqrt{D} = 2,5$), la evolución de la LPD es como la de una caminata aleatoria y la distribución de la LPD es ancha, lo que indica que la sincronización se perdió. Finalmente, se representa en la Fig. 4(b) el caso en el cual los LCOs no son idénticos. Los valores usados para el período del LCO₂ son, $T_{02} = 33,5$ ms (línea gris), y $T_{02} = 34,5$ ms (línea negra) son simétricos respecto a $T_{01} = 34,0$ ms. La varianza de la CPD como función de la intensidad de ruido es casi idéntica con un leve desplazamiento en la región síncrona. Como se muestra en la Fig. 4(a), en los gráficos de la parte superior de la figura, se representa la evolución de la LPD, y en los gráficos de la parte inferior, las respectivas distribucio-

nes para ambas situaciones. Para intensidades de ruido pequeñas ($\sqrt{D} = 0,2$), la sincronización está presente en ambos casos, a pesar de que en el caso $T_{02} < T_{01}$ hay un salto de fase. En el máximo de la región de transición ($\sqrt{D} = 0,4$), aparecen numerosos saltos de fase, especialmente cuando $T_{02} < T_{01}$ y la distribución de la CPD revela de nuevo un proceso de transición. Para valores de intensidad de ruido situados en la región de desincronización ($\sqrt{D} = 1,75$ y $\sqrt{D} = 2,5$), la evolución de la LPD decrece o aumenta tal como en el caso de dos LCOs desacoplados, lo que sugiere que los efectos del ruido actúan de forma tal que el acoplamiento no sea importante.

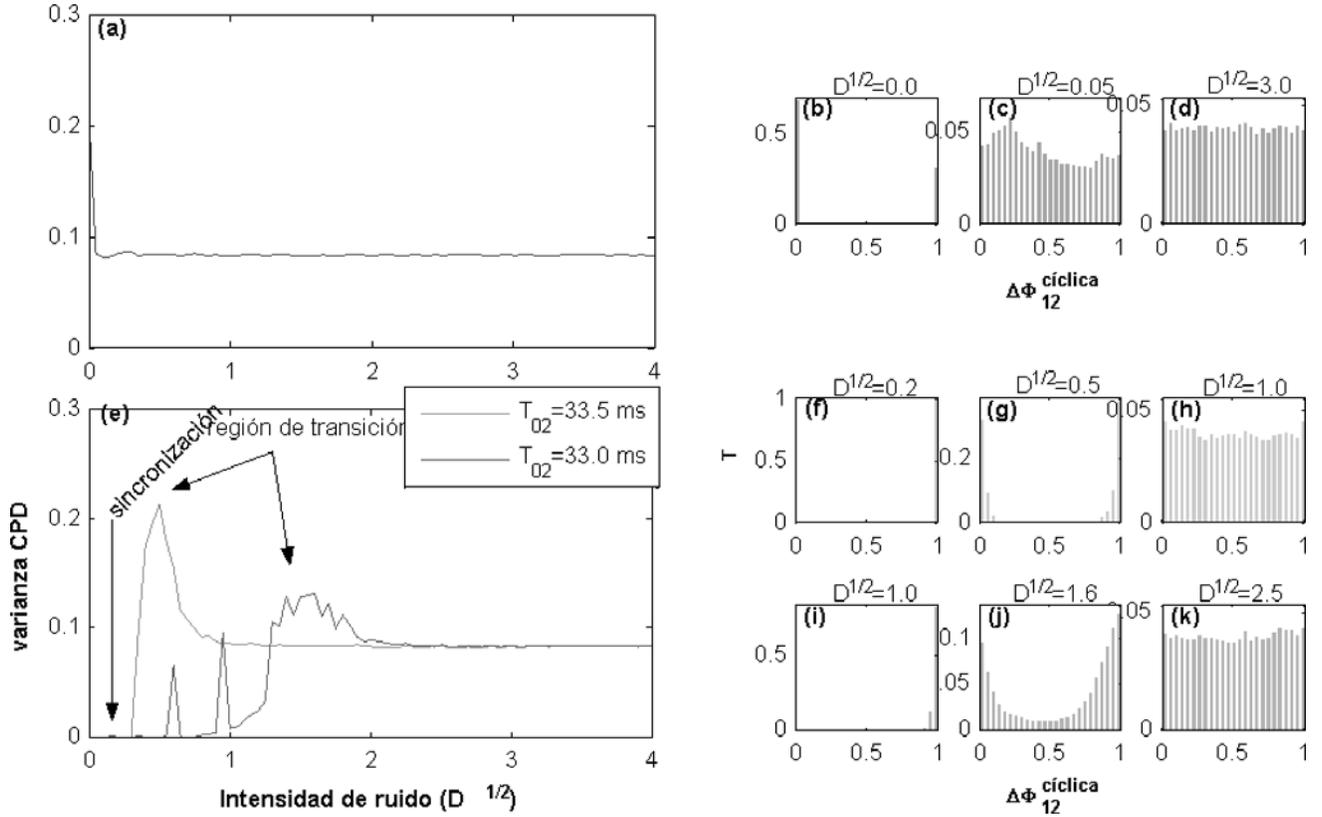


Figura 3. Varianza de la CPD para diferentes intensidades de ruido para una configuración maestro-esclavo. Los valores de parámetros son: $T_{01} = 34,0$ ms y el acoplamiento $\beta = 166$. (a) Caso de LCOs idénticos. Distribuciones de CPD mostrando que sólo que la sincronización es posible cuando los LCOs están libres de ruido. (b) Caso de LCOs no idénticos. Los valores de parámetros usados para el LCO₁ son $T_{02} = 33,5$ ms (línea negra), y $T_{02} = 33,0$ ms (línea gris). Las distribuciones de CPD se muestran para indicar la transición de la sincronización a la desincronización. (f)–(h) para $T_{02} = 33,5$ ms y (i)–(k) para $T_{02} = 33,0$ ms.

4. RUIDO GAUSSIANO

Desde un punto de vista teórico (aunque no necesariamente práctico), el ruido Gaussiano ofrece mayor riqueza en el sentido que es un ruido que no está bien delimitado y sigue una distribución normal, la más común para la descripción estadística de fenómenos en la naturaleza.

4.1. Generación de ruido Gaussiano

Para nuestras simulaciones, se ha trabajado con ruido Gaussiano generado a partir del método del Teorema del Límite Central con lo que garantizamos un generador de números aleatorios confiable. Primeramente se verificó que los números aleatorios que siguen una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ generados en nuestro programa tenían buenas propiedades estadísticas. Cada vez que se generan señales ruidosas con distribución normal, se pueden ajustar la media y la varianza de la amplitud de la señal.

El Teorema del Límite Central establece que la suma de N números aleatorios puede aproximarse a una distribución normal a medida que N tiende al infinito. Un algoritmo que utiliza esta aproximación es:

$X = 0$ for $i = 1$ to N

$U = \text{ran}()$
 $X = X + U$

end

Para números aleatorios en $[0, 1]$, $\mu = 0,5$ y $\sigma = 1/12$ ajustando X a $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

$X = X - N/2$ poniendo la media a 0

$X = X \sqrt{12/N}$ ajustando la varianza a 1

Cuando el algoritmo finaliza, X será nuestro número aleatorio según una distribución normal unitaria. X puede posteriormente ser modificado para tener una media particular μ y una varianza σ , por ejemplo:

$$Xt = \mu + \sqrt{\sigma}X$$

El inconveniente de este método es que X estará en el intervalo $[-N, N]$, en vez de $(-\infty, \infty)$ y si los números aleatorios uniformes no son verdaderamente independientes, entonces, el ruido no será blanco por mucho tiempo. Se trabajó con $N = 21$ con el fin de tener buenos resultados.

En este caso, se utiliza (2) para efectuar simulaciones de la influencia de ruido Gaussiano con media 0 y varianza 1 en un sistema de dos LCOs acoplados. Es

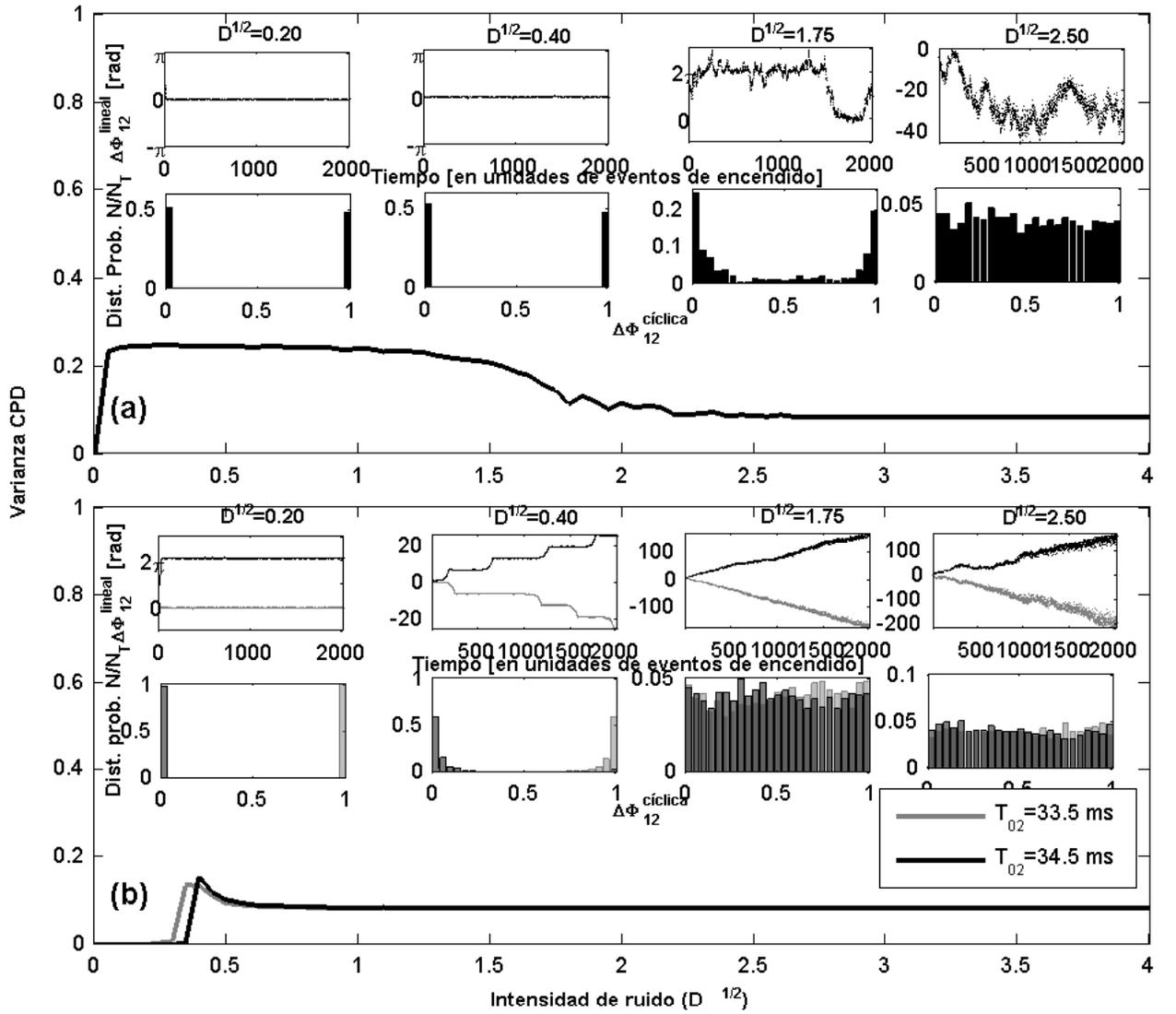


Figura 4. Varianza de la CPD para diferentes intensidades de ruido para LCOs acoplados. Los valores de los parámetros son los mismos que en la Fig. 3 para T_{01} y β . (a) Caso de LCOs idénticos. Distribuciones de la CPD mostrando que la sincronización es sólo posible cuando los LCOs no están afectados por el ruido. (b) Caso de LCOs no idénticos. Los valores de parámetros utilizados para LCO₂ son $T_{02} = 33,5$ ms (línea gris), y $T_{02} = 34,5$ ms (línea negra). Las distribuciones de la CPD se muestran para indicar la transición de la sincronización a la desincronización.

importante señalar que para el cálculo de la diferencia de fase (4), se consideró el promedio de los períodos, es decir,

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{ij}^{\text{linear}} &= \Phi_i(t_i^{(k)}) - \Phi_j(t_i^{(k)}) \\ &= 2\pi \frac{t_j^{(k+1)} - t_i^{(k+1)}}{\frac{(t_j^{(k+1)} - t_i^{(k)}) + (t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)})}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

y así garantizar un denominador no nulo que podría presentarse para intensidades de ruido elevadas, y además, sin cambiar sustancialmente los resultados.

4.2. Resultados

Las simulaciones efectuadas con ruido Gaussiano muestran que este ruido puede tener el mismo efecto “destructor de la sincronización”, pero algunos resultados sugieren que el ruido puede inducir sincronización cuando los LCOs tienen características muy distintas (ver Fig. 5). Así, tomando 2 LCOs cuyas características son: $T_{01} = 34,0$ ms, $T_{02} = 32,5$ ms, la intensidad del acoplamiento $\beta = 100$ y sometidos a ruidos Gaussianos con varianzas $\sigma_1 = 0,003$ y $\sigma_2 = 0,001$. En la Fig. 5 se muestra en cada una de las filas de gráficos, la relación de frecuencias ν_1/ν_2 , la LPD en función del tiempo y la distribución de probabilidades para la CPD. En ausencia de ruido ($\sqrt{D} = 0$), se ve que los LCOs no sin-

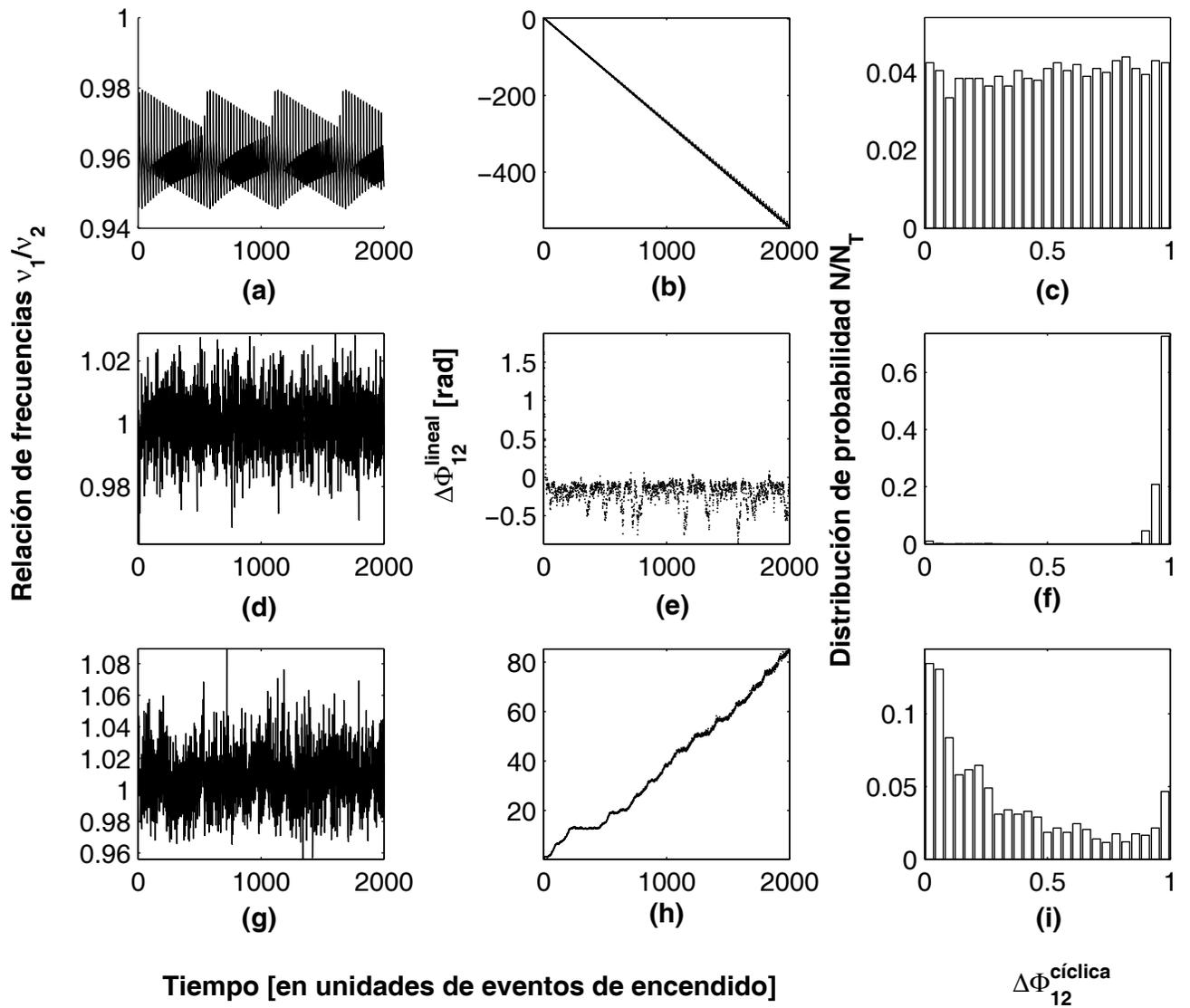


Figura 5. Relación de frecuencias ν_1/ν_2 , evolución de la LPD, y distribución de probabilidades para la CPD en un sistema de dos LCOs acoplados con $T_{01} = 34,0$ ms, $T_{02} = 32,5$ ms, $\beta = 100$, y las varianzas de los ruidos Gaussianos que actúan sobre cada uno de los LCOs, $\sigma_1 = 0,003$ y $\sigma_2 = 0,001$; cuando las intensidades de ruido son (a)-(c) ($\sqrt{D} = 0,00$), (d)-(f) ($\sqrt{D} = 1,40$) y (g)-(i) ($\sqrt{D} = 2,00$).

cronizan; las relaciones de frecuencias nunca llegan a ser iguales a la unidad (Fig. 5(a)), la LPD disminuye difusivamente (Fig. 5(b)) y la distribución de probabilidades para la CPD es uniforme (Fig. 5(c)). En tanto, que si se aumenta la intensidad de ruido a $\sqrt{D} = 1,40$, se muestra una situación de sincronización en promedio, caracterizada por fluctuaciones casi simétricas alrededor de $\nu_1/\nu_2 = 1$ (Fig. 5(d)), valores muy próximos a $\Delta\Phi_{12}^{lineal} = 0$ (Fig. 5(e)) y una distribución de la CPD unimodal (Fig. 5(f)). Si se aumenta aún más la intensidad de ruido, se vuelve a una situación de desincronización como lo muestran las Fig. 5(g)-(i), en cuyo caso, $\sqrt{D} = 1,40$. Los resultados anteriores muestran que el ruido Gaussiano en un sistema de dos LCOs acoplados,

no sólo induce desincronización, sino que también puede -bajo ciertas circunstancias- inducir un comportamiento sincrónico en el sistema. En nuestros experimentos numéricos, este último comportamiento se observó cuando las varianzas de los ruidos Gaussianos actuando sobre los LCOs son diferentes.

5. CONCLUSIONES

La influencia de ruidos uniforme y Gaussiano es similar pero en el caso de ruidos Gaussianos, incluso intensidades muy débiles, pueden hacer salir al sistema de su estado sincrónico. En lo referente a los saltos de fase, su número está en estrecha relación con la intensidad del ruido; mientras mayor sea la intensidad de ruido, más

grande será el número de saltos de fase. Además, estos saltos de fase aumentan y las épocas en que la LPD es aproximadamente constante se vuelven más estrechas con el tiempo y con la intensidad del ruido. Una característica del ruido Gaussiano es que si las varianzas de los ruidos son diferentes sobre cada uno de los LCOs, los osciladores que en condiciones libres de ruido no sincronizan, pueden llegar a hacerlo gracias a la influencia del ruido.

REFERENCIAS

- [1] J. L. Guisset, G. M. Ramírez Ávila, and J. L. Deneubourg, "Constructing coupled electronic fireflies and measuring their phase-locking behavior (in spanish)," *Revista Boliviana de Física*, vol. 1, no. 7, pp. 102–114, 2001.
- [2] J.-L. Guisset, J.-L. Deneubourg, and G. M. Ramírez-Ávila, "The phase information associated to synchronized electronic fireflies," *arXiv.nlin.AO/0206036*, no. Mon, 24 Jun 2002 16:07:15 GMT, 2002.
- [3] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, and J. L. Deneubourg, "Synchronization in light-controlled oscillators," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 182, no. 3-4, pp. 254–273, 2003.
- [4] J. García-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in spatially extended systems*. New York.: Springer, 1999.
- [5] J. M. Sancho and J. García-Ojalvo, "Noise-induced order in extended systems: A tutorial," in *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology* (J. A. Freund and T. Poschel, eds.), vol. 557 of *Lectures Notes in Physics*, pp. 235–246, Berlin: Springer, 2000.
- [6] A. Neiman, X. Pei, D. Russell, W. Wojtenek, L. Wilkens, F. Moss, H. Braun, M. T. Huber, and K. Voigt, "Synchronization of the noisy electrosensitive cells in the paddlefish," *Physical Review Letters*, vol. 82, no. 3, pp. 660–663, 1999.
- [7] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, "Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, vol. 44, no. 10, pp. 874–881, 1997.
- [8] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, and J. Kurths, "Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 104, no. 3-4, pp. 219–238, 1997.
- [9] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, vol. 12 of *Cambridge nonlinear science series*. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [10] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, and J. L. Deneubourg, "Synchronous behavior in small populations of light-controlled oscillators," in *11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems* (R. Stoop, ed.), (Scuol/Schuls, Switzerland), pp. 201–204, 2003.

LOS ARTÍCULOS DEL *ANNUS MIRABILIS* DE ALBERT EINSTEIN

Diego Sanjinés C.¹

Carrera de Física—U.M.S.A.

Este 2005 se celebra, por determinación de la UNESCO, el Año Mundial de la Física, en honor a los 100 años del *Annus Mirabilis* de Albert Einstein, aquel 1905 en que la revista alemana *Annalen der Physik*² publicara los artículos que habrían de revolucionar la física clásica para dar paso a la física moderna. Ese año de 1905 fue testigo del ascenso majestuoso de Einstein en el panorama internacional de la ciencia (y de la filosofía) a partir de un oscuro puesto de perito técnico en la Oficina de Patentes de Berna (Suiza). Ya se ha escrito bastante sobre ésta y otras etapas fascinantes de la vida de Einstein, así como sobre el prolífico legado de sus trabajos de 1905. Hoy, como una parte esencial en la formación de todo físico, los textos de enseñanza proveen las ideas básicas de las teorías de Einstein adaptadas de una manera pedagógica.

Sin embargo, los trabajos *originales* de Einstein, aquellos que contienen sus propias palabras, no son muy comunes ni accesibles al científico moderno (y menos al público general), tal vez por estar ya comprendidos en los textos técnicos o tal vez por haber sido concebidos para los expertos del principios del siglo XX y contener un lenguaje muy sofisticado. No obstante, se puede encontrar algunas publicaciones con dichos trabajos originales o partes de éstos junto a comentarios y trabajos de otros científicos contemporáneos de Einstein, pero por lo general el idioma predominante es el inglés (véase, por ejemplo, las fuentes bibliográficas de los artículos traducidos aquí).

Así, la Carrera de Física de la UMSA y la Sociedad Boliviana de Física, a través de las páginas que siguen, ponen al alcance de los lectores hispano-parlantes de la *Revista Boliviana de Física*, la traducción al español de los cuatro trabajos más importantes de Einstein de 1905 (aquellos referidos a: el efecto fotoeléctrico, el movimiento browniano, la relatividad especial y la equivalencia masa-energía), a fin de ofrecerles la oportunidad de apreciar aquello que escribió Einstein “tal cual”, tratando de conservar la mayor fidelidad posible con las traducciones comunes del alemán al inglés, confiando en que éstas habrían sido realizadas por especialistas que conservaron el contenido técnico y “literario” que quiso Einstein transmitir a la posteridad. Obviamente no se pretende aquí explicar las ideas de Einstein ni hacer comentarios colaterales, a pesar de que varios pasajes de sus trabajos originales sugieren una pausa para hacer aclaraciones. Pero este es un tema que ya ha sido ampliamente abarcado por especialistas en muchas ocasiones (por ejemplo, en la *Revista Española de Física* **19**, 1, (2005), y referencias allí citadas). El único propósito pues de estas traducciones es que el lector tenga este material a su disposición con la esperanza de que en cualquier momento pueda comparar lo que dicen los textos y lo que dijo Einstein o, simplemente, como un homenaje histórico a la memoria del gran físico.

¹Email: sanjines@fiums.a.edu.bo

²Página siguiente: portada del célebre volumen 17 de *Annalen der Physik* donde se publicaron los artículos sobre efecto fotoeléctrico, movimiento browniano y relatividad especial. El cuarto artículo sobre la equivalencia masa-energía se publicó en 1905 en el volumen 18 de la misma revista.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 17.

DER GANZEN REIHE 322. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT FÜNF FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1905.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

SOBRE UN PUNTO DE VISTA HEURÍSTICO CONCERNIENTE A LA PRODUCCIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE LA LUZ ¹

Albert Einstein

Berna, 17 de Marzo de 1905

Existe una diferencia formal y profunda entre los conceptos teóricos que los físicos han creado sobre los gases y otros cuerpos ponderables, y la teoría de Maxwell de los procesos electromagnéticos en el —así llamado— espacio vacío. Mientras que consideramos al estado de un cuerpo completamente determinado por las posiciones y velocidades de un número muy grande, pero finito, de átomos y electrones, nos servimos por otro lado de funciones espaciales continuas para la determinación del estado electromagnético en cierto volumen, de tal manera que un número finito de parámetros no se puede considerar suficiente para una determinación completa de dicho estado. Según la teoría de Maxwell, la energía se debe interpretar como una función espacial continua para todos los fenómenos puramente electromagnéticos, incluida la luz, mientras que la energía de un objeto ponderable se interpreta, según las concepciones actuales de los físicos, como una suma que se extiende sobre todos los átomos y electrones. La energía de un cuerpo ponderable no puede descomponerse en cualquier número de partículas o en un número de partículas arbitrariamente pequeñas, mientras que según la teoría de Maxwell (o, en general, según toda teoría ondulatoria) la energía de un haz de luz emitido por una fuente puntual se distribuye de manera continua en un volumen cada vez mayor.

La teoría ondulatoria de la luz, que opera con funciones espaciales continuas, ha demostrado representar bien los fenómenos ópticos puros y probablemente nunca sea sustituida por otra teoría. Sin embargo, debe tenerse presente que las observaciones ópticas se refieren a promedios temporales en lugar de valores instantáneos. En lugar de una comprobación íntegra de esta teoría tal como se aplica a los fenómenos de difracción, reflexión, refracción, dispersión, etc., es concebible que la teoría de la luz, que opera con funciones continuas en el espacio, pueda conducir a contradicciones con la experiencia cuando se aplica a los fenómenos de emisión y transformación de luz.

Me parece que las observaciones sobre la radiación del cuerpo negro, la fluorescencia, la producción de rayos catódicos por luz ultravioleta y otros fenómenos concernientes a la emisión o transformación de luz, se entienden mejor bajo la suposición de que la energía de la

luz está distribuida de manera discontinua en el espacio. Según la suposición que se propone hacer en este trabajo, la energía de un haz de luz que se propaga desde una fuente puntual no se distribuye continuamente en un espacio creciente, sino que consiste de un número finito de cuantos de energía localizados en puntos del espacio, los cuales se mueven sin dividirse y sólo se pueden producir o absorber como unidades completas.

A continuación deseo exponer la línea de razonamiento y los hechos que me han conducido a este punto de vista, con la esperanza de que ello pueda ser útil para algunos investigadores en sus estudios.

1. SOBRE UNA DIFICULTAD CONCERNIENTE A LA TEORÍA DE LA RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO

Comencemos por considerar el siguiente caso dentro del contexto de la teoría de Maxwell y la teoría del electrón. En un espacio cerrado comprendido entre paredes perfectamente reflejantes se encuentra un número de moléculas gaseosas y electrones que se pueden mover libremente y ejercen fuerzas conservativas mutuas cuando están próximas entre sí; esto es, pueden chocar entre sí como moléculas de acuerdo a la teoría cinética de los gases (²). Más aún: supongamos un cierto número de electrones que están ligados a puntos del espacio muy distantes entre sí, por medio de fuerzas proporcionales a las distancias de los electrones a estos puntos. Estos electrones también participan en interacciones conservativas con las moléculas y demás electrones libres cuando éstos se aproximan mucho. Llamaremos “resonadores” a estos electrones ligados y supondremos que emiten y absorben ondas electromagnéticas con periodos determinados.

De acuerdo a la concepción actual sobre la producción de la luz, la radiación en el espacio considerado (la cual existe, según la teoría de Maxwell, en el caso de equilibrio dinámico) debe ser idéntica a la radiación del cuerpo negro, al menos si los resonadores de todas las frecuencias relevantes están disponibles.

Prescindamos por lo pronto de la radiación emitida y absorbida por los resonadores y preguntemos acerca

¹ Traducción realizada por el Ing. Edgar Ricaldi Yarvi a partir de “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”, A. Einstein, en *Annalen der Physik* (Leipzig, 1905), p. 132.

² Esta suposición equivale a la condición de que las energías cinéticas promedio de las moléculas gaseosas y los electrones sean iguales entre sí en equilibrio térmico. Con ayuda de esta última condición, Drude derivó teóricamente, como es conocido, el cociente entre las conductividades térmica y eléctrica de los metales.

de la condición de equilibrio dinámico asociado a las interacciones (o colisiones) de moléculas y electrones. La teoría cinética de los gases asegura que la energía cinética media de un electrón oscilador debe ser igual a la energía cinética media de traslación de una molécula gaseosa. Si descomponemos el movimiento de un electrón oscilador en sus tres componentes ortogonales, encontramos el valor medio $\langle E \rangle$ de la energía de una de tales componentes lineales:

$$\langle E \rangle = (R/N)T,$$

donde R es la constante universal de los gases. El símbolo N denota el número de "moléculas reales" en un equivalente gramo y T es la temperatura absoluta. La energía $\langle E \rangle$ es igual a dos tercios de la energía cinética de una partícula de un gas monoatómico a causa de la igualdad del valor medio temporal de las energías cinética y potencial del oscilador. Si por una causa cualquiera —procesos de radiación en nuestro caso— ocurriera que la energía de un resonador tuviera un valor medio temporal mayor o menor que $\langle E \rangle$, entonces las colisiones con los electrones libres y las moléculas conducirían a ganancias o a pérdidas de energía del gas, en promedio, distintas de cero. Por lo tanto, en el caso que consideramos, el equilibrio dinámico sólo es posible cuando cada oscilador posea la energía promedio $\langle E \rangle$.

A continuación presentaremos un argumento similar con relación a la interacción de los osciladores con la radiación existente en la cavidad. Planck ⁽³⁾ ha derivado la condición de equilibrio dinámico para este caso bajo la suposición de que la radiación se puede considerar como un proceso completamente aleatorio ⁽⁴⁾. Él encontró que

$$\langle E \rangle_\nu = (L^3/8\pi\nu^2) \rho_\nu,$$

³M. Planck, Ann. d. Phys. **1**, p. 99, 1900.

⁴Esta suposición se puede formular de la siguiente manera. Desarrollamos la componente z de la fuerza eléctrica (Z) en una serie de Fourier en un punto cualquiera del espacio durante el intervalo temporal entre $t = 0$ y $t = T$ (donde T es un tiempo muy grande con relación a los períodos de las demás oscilaciones), de tal forma que $A_\nu \geq 0$ y $0 \leq \alpha_\nu \leq 2\pi$:

$$Z = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \sin(2\pi\nu t/T + \alpha_\nu).$$

Si se piensa que esta expansión se puede hacer en un punto dado del espacio en instantes cualesquiera escogidos al azar, entonces se obtiene varios conjuntos de valores para A_ν y α_ν . Así, para la frecuencia de ocurrencia de los distintos conjuntos de valores de A_ν y α_ν , existen probabilidades (estadísticas) dW de la forma

$$dW = f(A_1, A_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots) dA_1 dA_2 \dots d\alpha_1 d\alpha_2 \dots$$

La radiación será entonces tan desordenada como se pueda concebir si

$$f(A_1, A_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots) = F_1(A_1)F_2(A_2)\dots f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2)\dots,$$

esto es, si la probabilidad de un valor determinado de A o α es independiente de otros valores de estas variables. Mientras mejor se satisfaga esta condición (i.e., que los pares individuales de valores A_ν y α_ν dependan de los procesos de emisión y absorción de grupos específicos de osciladores), la radiación en cuestión se aproximará más a un estado perfectamente aleatorio.

donde $\langle E \rangle_\nu$ es la energía media (por grado de libertad) de un oscilador con frecuencia propia ν , L es la velocidad de la luz, ν es la frecuencia, y $\rho_\nu d\nu$ es la energía por unidad de volumen de esa porción de radiación con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$.

Si la energía de la radiación de frecuencia ν no crece o decrece de manera continua, entonces debe cumplirse

$$(R/N)T = \langle E \rangle = \langle E \rangle_\nu = (L^3/8\pi\nu^2) \rho_\nu, \\ \rho_\nu = (R/N) (8\pi\nu^2/L^3) T.$$

Estas relaciones, encontradas como condiciones del equilibrio dinámico, no solamente fallan al compararse con los experimentos, sino que también indican que en nuestro modelo no se puede hablar de una distribución determinada de energía entre éter y materia. Mientras más amplio sea el rango de frecuencias de los osciladores, mayor será la energía de la radiación del espacio, y en el límite al infinito obtendremos

$$\int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \left(\frac{R}{N}\right) \left(\frac{8\pi}{L^3}\right) T \int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty.$$

2. SOBRE LA DETERMINACIÓN DE PLANCK DE LAS CONSTANTES FUNDAMENTALES

Queremos mostrar a continuación que la determinación de las constantes fundamentales dada por Planck es, hasta cierto grado, independiente de su teoría de la radiación del cuerpo negro.

La fórmula de Planck ⁽⁵⁾ que hasta ahora ha probado ser adecuada, da para ρ_ν :

$$\rho_\nu = \frac{\alpha\nu^3}{e^{\beta\nu/T} - 1}, \\ \alpha = 6,10 \times 10^{-56}, \\ \beta = 4,866 \times 10^{-11}.$$

Para valores grandes de T/ν , es decir, para grandes longitudes de onda y densidades de radiación, esta fórmula se convierte en

$$\rho_\nu = (\alpha/\beta)\nu^2 T.$$

Se reconoce que esta expresión coincide con aquella de la sección 1, desarrollada a partir de la teoría de Maxwell y de la teoría del electrón. Igualando los coeficientes de ambas fórmulas se obtiene

$$(R/N)(8\pi/L^3) = \alpha/\beta,$$

de donde

$$N = (\beta/\alpha)(8\pi R/L^3) = 6,17 \times 10^{23}.$$

Esto significa que un átomo de hidrógeno pesa $1/N$ gramos, i.e., $1,62 \times 10^{-24}$ g. Este es exactamente el va-

⁵M. Planck, Ann. d. Phys. **4**, p. 561, 1901.

encontrado por Planck, lo que está de acuerdo con el valor encontrado por otros métodos para dicha cantidad.

Llegamos pues a la siguiente conclusión: mientras mayor sea la densidad de energía y la longitud de onda de la radiación, más útiles resultan ser los principios teóricos utilizados; sin embargo, para longitudes de onda cortas y pequeñas densidades de radiación estos principios fracasan totalmente.

A continuación consideraremos los hechos experimentales concernientes a la radiación del cuerpo negro sin invocar algún modelo particular sobre la producción y propagación de la radiación.

3. SOBRE LA ENTROPÍA DE LA RADIACIÓN

La siguiente consideración se encuentra en un famoso trabajo de W. Wien y se mencionará aquí sólo para efectos de completitud.

Supongamos que se tiene una radiación que ocupa el volumen v . Asumimos que las propiedades observables de la radiación están determinadas completamente cuando la densidad de radiación ρ_ν está dada para todas las frecuencias ⁽⁶⁾. Ya que las radiaciones de diversas frecuencias se consideran independientes unas de otras cuando no hay transferencia de calor o trabajo, entonces la entropía de la radiación se puede representar por

$$S = v \int_0^\infty \phi(\rho, \nu) d\nu,$$

donde ϕ es una función de las variables ρ y ν . Se puede reducir ϕ a una función de una variable, estableciendo la condición de que la entropía de la radiación no se modifique durante la compresión adiabática entre paredes reflejantes. No abordaremos este problema, sino que investigaremos directamente cómo se puede calcular la función ϕ a partir de la ley de radiación del cuerpo negro.

En el caso de la radiación del cuerpo negro, ρ es una función de ν tal que para una energía dada la entropía es máxima, esto es,

$$\delta \int_0^\infty \phi(\rho, \nu) d\nu = 0,$$

siempre que

$$\delta \int_0^\infty \rho d\nu = 0.$$

De aquí sigue que para cada elección de $\delta\rho$ como función de ν se cumple

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \lambda \right) \delta\rho d\nu = 0,$$

⁶Esta suposición es arbitraria. Asumiremos como válida esta sencilla suposición si los experimentos no nos obligan a abandonarla.

donde λ es independiente de ν . Por lo tanto, en el caso de la radiación del cuerpo negro, $\partial\phi/\partial\rho$ es independiente de ν .

Cuando la temperatura de la radiación de cuerpo negro en un volumen unitario se incrementa en dT , es válida la ecuación

$$dS = \int_0^\infty (\partial\phi/\partial\rho) d\rho d\nu,$$

o, ya que $\partial\phi/\partial\rho$ es independiente de ν ,

$$dS = (\partial\phi/\partial\rho) dE.$$

Ya que dE es igual al calor añadido y ya que el proceso es reversible, entonces también es válido que

$$dS = (1/T) dE.$$

Por comparación se obtiene:

$$\partial\phi/\partial\rho = 1/T.$$

Esta es la ley de la radiación del cuerpo negro. Por lo tanto, se ve que se puede deducir esta ley a partir de la función ϕ y, recíprocamente, se puede deducir la función ϕ por integración, tomando en cuenta que ϕ desaparece para $\rho = 0$.

4. LEY ASINTÓTICA PARA LA ENTROPÍA DE LA RADIACIÓN MONOCROMÁTICA DE BAJA DENSIDAD

De las actuales observaciones sobre la radiación del cuerpo negro, está claro que la ley formulada originalmente por W. Wien,

$$\rho = \alpha\nu^3 e^{-\beta\rho/T},$$

no es exactamente válida. Sin embargo, la misma se confirmó experimentalmente para valores grandes de ν/T . Tomemos como base esta fórmula para nuestro análisis, teniendo en cuenta que los resultados serán válidos sólo dentro de ciertos límites.

La anterior fórmula conduce inmediatamente a

$$1/T = -(1/\beta\nu) \ln(\rho/\alpha\nu^3)$$

y luego, usando la relación encontrada en la sección anterior,

$$\phi(\rho, \nu) = -\frac{\rho}{\beta\nu} \left[\ln \left(\frac{\rho}{\alpha\nu^3} \right) - 1 \right].$$

Supongamos que tenemos radiación con energía E , cuya frecuencia se encuentra entre ν y $\nu + d\nu$, dentro de un volumen v . La entropía de esta radiación es:

$$S = v\phi(\rho, \nu) d\nu = -\frac{E}{\beta\nu} \left[\ln \left(\frac{E}{v\alpha\nu^3 d\nu} \right) - 1 \right].$$

Si nos limitamos a investigar la dependencia de la entropía del volumen ocupado por la radiación, y si denotamos por S_0 a la entropía de la radiación en el volumen v_0 , obtenemos

$$S - S_0 = (E/\beta\nu) \ln(v/v_0).$$

Esta ecuación muestra que la entropía de una radiación monocromática con densidad suficientemente pequeña varía con el volumen de la misma forma que lo hace la entropía de un gas ideal o de una solución diluida. En lo que sigue, esta ecuación será interpretada de acuerdo al principio introducido en la física por Boltzmann, esto es, que la entropía de un sistema es una función de la probabilidad de su estado.

5. INVESTIGACIÓN TEÓRICO-MOLECULAR DE LA DEPENDENCIA DE LA ENTROPÍA DE GASES Y SOLUCIONES DILUIDAS CON RESPECTO AL VOLUMEN

En el cálculo de la entropía por métodos teórico-moleculares se emplea frecuentemente la palabra “probabilidad”, en un sentido que no coincide con la definición empleada en el cálculo de probabilidades. En particular, el concepto de “gases de igual probabilidad” se ha establecido hipotéticamente con frecuencia, cada vez que los modelos teóricos que se utilizan son suficientes para permitir un proceso deductivo en lugar de realizar conjeturas. Mostraré en otro artículo que el concepto de “probabilidad estadística” es completamente adecuado para el tratamiento de los fenómenos térmicos, y espero que al hacerlo eliminaré la dificultad lógica que obstruye la aplicación del Principio de Boltzmann. Aquí, sin embargo, sólo se dará su formulación general junto con aplicaciones a casos muy especiales.

Si tiene sentido hablar de la probabilidad del estado de un sistema y, además, si cada incremento de entropía puede ser entendido como una transición hacia un estado más probable, entonces la entropía S_1 de un sistema es una función de W_1 , la probabilidad de su estado instantáneo. Si tenemos dos sistemas S_1 y S_2 que no interactúan, se puede escribir:

$$S_1 = \phi_1(W_1), \quad S_2 = \phi_2(W_2).$$

Si se considera a ambos sistemas como un único sistema con entropía S y probabilidad W , entonces

$$S = S_1 + S_2 = \phi(W) \quad \text{y} \quad W = W_1 W_2.$$

Esta última relación expresa que los estados de ambos sistemas son eventos independientes entre sí.

De estas ecuaciones sigue que

$$\phi(W_1 W_2) = \phi_1(W_1) + \phi_2(W_2),$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned} \phi_1(W_1) &= C \ln(W_1) + \text{const.}, \\ \phi_2(W_2) &= C \ln(W_2) + \text{const.}, \\ \phi(W) &= C \ln(W) + \text{const.} \end{aligned}$$

La cantidad C es entonces una constante universal; de la teoría cinética de los gases se deduce que C tiene el valor R/N , donde las constantes R y N tienen el mismo significado que se les asignó anteriormente. Si S_0 denota la entropía de un sistema en cierto estado inicial y W denota la probabilidad relativa de un estado con entropía S , entonces obtenemos en general

$$S - S_0 = (R/N) \ln W.$$

Consideremos primeramente el siguiente caso especial. En un volumen v_0 se tiene un número n de puntos móviles (p.ej. moléculas), a las cuales se referirán nuestros razonamientos. Además de éstos, pueden estar presentes aun un número arbitrario de puntos móviles de cualquier tipo. No se supondrá nada sobre la ley según la cual se mueven estos puntos en el espacio, como tampoco se distinguirá ninguna dirección preferencial de este movimiento respecto a las demás. El número de puntos móviles considerados (los primeros que se mencionaron) será tan pequeño que se puede despreciar la interacción mutua entre ellos.

Al sistema en cuestión, que puede ser, por ejemplo, un gas ideal o una solución diluida, le corresponde una determinada entropía S_0 . Imaginemos una parte (con volumen v) del volumen v_0 donde todos los puntos móviles n son transferidos, sin nada más que cambie en el sistema. A este estado le corresponde un valor de entropía S , y ahora queremos determinar la diferencia de entropía con ayuda del principio de Boltzmann.

A continuación nos preguntamos: ¿cuán grande es la probabilidad de este último estado en relación con el original? O: ¿cuán grande es la probabilidad de que en un instante cualquiera todos los puntos móviles independientes entre sí que estaban en un volumen v_0 , se encuentren ahora aleatoriamente en el volumen v ?

Para esta probabilidad, que es una “probabilidad estadística”, es evidente que:

$$W = (v/v_0)^n.$$

Aplicando el principio de Boltzmann se obtiene:

$$S - S_0 = R(n/N) \ln(v/v_0).$$

Es notable observar que para la deducción de esta ecuación, de la que se puede derivar fácilmente la ley de Boyle-Gay-Lussac y la ley para la presión osmótica⁽⁷⁾, no se necesita hacer ninguna suposición sobre la ley que rige el movimiento de las moléculas.

⁷ Si E es la energía del sistema, se obtiene:

$$-d(E - TS) = pdv = TdS = R(n/N)(dv/v);$$

por lo tanto $pv = RT(n/N)$.

6. INTERPRETACIÓN DE LA EXPRESIÓN PARA LA DEPENDENCIA DE LA ENTROPÍA DE RADIACIÓN MONOCROMÁTICA DEL VOLUMEN, DE ACUERDO CON EL PRINCIPIO DE BOLTZMANN

En la sección 4 encontramos la expresión para la dependencia de la entropía de la radiación monocromática del volumen:

$$S - S_0 = (E/\beta\nu) \ln(v/v_0).$$

Escribiendo esta ecuación de la forma

$$S - S_0 = (R/N) \ln \left[(v/v_0)^{(N/R)(E/\beta\nu)} \right],$$

y comparándola con la expresión general del principio de Boltzmann:

$$S - S_0 = (R/N) \ln W,$$

se llega a la siguiente conclusión: si la radiación monocromática con frecuencia ν y con energía E está encerrada (por paredes reflejantes) en el volumen v_0 , entonces la probabilidad de que en un instante cualquiera toda la energía de radiación se encuentre en una parte v del volumen v_0 es

$$W = (v/v_0)^{(N/R)(E/\beta\nu)}.$$

De aquí podemos concluir además: la radiación monocromática de baja densidad (dentro del rango de validez de la fórmula de la radiación de Wien) relacionada a la teoría del calor, se comporta como si estuviera constituida de cuantos de energía independientes entre sí con magnitud $R\beta\nu/N$.

También queremos comparar la magnitud media de los cuantos de energía de la radiación del cuerpo negro con la energía cinética media traslacional del centro de masa de una molécula a la misma temperatura. Dicha magnitud es $3RT/2N$, mientras que, de acuerdo a la fórmula de Wien, el valor medio del cuanto de energía es:

$$\int_0^\infty \alpha\nu^3 e^{-\beta\nu/T} d\nu \left(\int_0^\infty (N/R\beta\nu) \alpha\nu^3 e^{-\beta\nu/T} d\nu \right)^{-1} = 3RT/N.$$

Si la entropía de la radiación monocromática (con una densidad suficientemente baja) depende del volumen como si la radiación fuera un medio discontinuo consistente de cuantos de energía de magnitud $R\beta\nu/N$, el siguiente paso razonable es investigar si las leyes de la producción y transformación de la luz son de tal naturaleza que pudieran ser interpretadas como si la luz consistiese también de tales cuantos de energía.

7. SOBRE LA REGLA DE STOKES

De acuerdo al resultado obtenido, supongamos que, cuando se transforma por fotoluminiscencia luz monocromática en luz de una frecuencia diferente, tanto la luz incidente como la emitida consisten de cuantos de energía de magnitud $R\beta\nu/N$, donde ν es la frecuencia en cuestión. El proceso de transformación será interpretado de la siguiente manera. Cada cuanto de energía incidente de frecuencia ν_1 es absorbido y genera por sí solo —al menos para densidades suficientemente bajas de cuantos energía incidente— un cuanto de luz de frecuencia ν_2 ; es posible que la absorción del cuanto de luz incidente pueda provocar simultáneamente la emisión de cuantos de luz de frecuencias ν_3, ν_4 , etc., así como energías de otro tipo (p. ej. calor). No interesa qué tipo de proceso intermedio lleve a este resultado final. Si la sustancia fotoluminiscente no es una fuente perpetua de energía, entonces el principio de conservación de energía requiere que la energía de un cuanto emitido no sea mayor que la de un cuanto de luz incidente; así, debe ser válida la relación

$$R\beta\nu_2/N \leq R\beta\nu_1/N,$$

o sea

$$\nu_2 \leq \nu_1.$$

Esta es la conocida regla de Stokes.

Debe señalarse de manera especial que, según nuestra interpretación, la cantidad de luz emitida bajo condiciones de escasa iluminación (permaneciendo inalterables otras condiciones) debe ser proporcional a la intensidad de luz incidente, ya que cada cuanto de energía incidente causará un proceso elemental del tipo postulado, independiente de la acción de otros cuantos de energía incidente. En particular, no habrá límite inferior alguno para la intensidad de la luz incidente necesaria para producir fotoluminiscencia.

Según las interpretaciones expuestas sobre estos fenómenos, se puede pensar en desviaciones de la Regla de Stokes en los siguientes casos:

1. Cuando el número de cuantos de energía por unidad de volumen que participan simultáneamente en la transformación sea tan grande, que un cuanto de energía de la luz producida pueda adquirir su energía de más de un cuanto de energía incidente.

2. Cuando la luz incidente (o emitida) no tenga la composición energética de la radiación del cuerpo negro correspondiente en el rango de validez de la ley de Wien, p. ej., cuando la luz incidente es producida por un cuerpo con una temperatura tan alta, que la Ley de Wien ya no sea válida para estas longitudes de onda.

Esta última posibilidad merece particular atención. Según la interpretación desarrollada no se descarta que

una radiación de baja densidad que no sea del “tipo Wien”, se comporte energéticamente de manera diferente que una radiación de cuerpo negro dentro del rango de validez de la Ley de Wien.

8. SOBRE LA PRODUCCIÓN DE RAYOS CATÓDICOS POR ILUMINACIÓN DE CUERPOS SÓLIDOS

La interpretación común de que la energía de la luz estaría distribuida continuamente en todo el espacio por el que se propaga, encuentra grandes dificultades al intentar explicar los fenómenos fotoeléctricos, como ya fue señalado en el trabajo pionero de Lenard ⁽⁸⁾.

Sin embargo, según la idea de que la luz incidente consiste de cuantos de energía con magnitud $R\beta\nu/N$, es posible concebir la eyección de electrones por medio de luz de la siguiente manera. Los cuantos de energía penetran en la capa superficial del cuerpo, de tal forma que su energía se transforma, al menos en parte, en energía cinética de los electrones. La manera más sencilla de imaginarse esto es que un quantum de luz cede toda su energía a un electrón; supondremos pues que esto es lo que ocurre. No obstante, no se debe descartar que los electrones puedan adquirir sólo una parte de la energía de los cuantos de luz. Un electrón que adquirió así su energía en el interior del cuerpo, habrá perdido una parte de ésta cuando haya alcanzado la superficie. Se supondrá además que cada electrón, al abandonar el cuerpo, tiene que hacer un trabajo P característico de la sustancia del cuerpo. Los electrones eyectados con la mayor velocidad perpendicular a la superficie serán aquellos que están más cerca de dicha superficie. La energía cinética de tales electrones es

$$R\beta\nu/N - P.$$

Si el cuerpo está cargado a un potencial positivo Π y está rodeado de conductores con potencial cero, y si Π es suficientemente grande como para prevenir pérdidas de electricidad en el cuerpo, entonces:

$$\Pi\varepsilon = R\beta\nu/N - P$$

donde ε es la carga del electrón, o

$$\Pi E = R\beta\nu - P'$$

donde E es la carga de un equivalente gramo de un ion monovalente y P' es el potencial de esta cantidad de electricidad negativa en relación al cuerpo ⁽⁹⁾.

Si se toma $E = 9,6 \times 10^3$, entonces $\Pi \times 10^{-8}$ es el potencial en volts que el cuerpo adquiere por iluminación en el vacío.

⁸P. Lenard, Ann. d. Phys. **8**, p. 169, 1902.

⁹Si suponemos que la luz desprende un único electrón de una molécula neutra realizando una cierta cantidad de trabajo, no se tiene que cambiar nada en la relación deducida arriba; simplemente se debe considerar a P' como una suma de dos términos.

Para ver si la relación derivada conduce a un valor cuyo orden de magnitud sea consistente con los experimentos, tomemos $P' = 0$, $\nu = 1,03 \times 10^{15}$ (correspondiente al límite del espectro solar hacia el ultravioleta) y $\beta = 4,866 \times 10^{-11}$. Se obtiene así $\Pi \times 10^7 = 4,3$ volts, resultado cuyo orden de magnitud coincide con los resultados de Lenard ⁽¹⁰⁾.

Si la formula deducida es correcta, entonces Π , cuando se representa en coordenadas cartesianas como una función de la frecuencia de la luz incidente, tiene que ser una línea recta cuya pendiente es independiente de la naturaleza de la sustancia emisora.

Hasta donde yo veo, no existe contradicción alguna entre estas concepciones y las propiedades del efecto fotoeléctrico observado por Lenard. Si cada cuanto de energía de la luz incidente, independientemente de todo lo demás, cede su energía a los electrones, entonces la distribución de velocidades de los electrones eyectados (i.e., la calidad de la radiación catódica producida) será independiente de la intensidad de la luz incidente; por otra parte, si se mantiene las demás condiciones constantes, entonces el numero de electrones eyectados será proporcional a la intensidad de la luz incidente ⁽¹¹⁾.

Sobre los límites de validez de la ley enunciada arriba, se puede hacer —con cierta audacia— comentarios similares a aquellos concernientes a las desviaciones hipotéticas de la regla de Stokes.

En lo anterior se supuso que la energía de al menos una parte de los cuantos de luz incidente se transfiere completamente a electrones individuales. Si no se hace esta suposición obvia, se obtiene, en lugar de la última ecuación, lo siguiente:

$$\Pi E + P' \leq R\beta\nu.$$

Para la luminiscencia catódica, que es el proceso inverso al antes mencionado, se obtiene por una consideración análoga:

$$\Pi E + P' \geq R\beta\nu.$$

En las sustancias examinadas por Lenard, ΠE siempre es mayor que $R\beta\nu$, ya que el voltaje que deben superar los rayos catódicos para generar luz visible asciende en unos casos a cientos de volts y en otros casos a miles de volts ⁽¹²⁾. Se debe suponer por lo tanto que la energía cinética de un electrón se consume en la producción de varios cuantos de energía.

¹⁰P. Lenard, Ann. d. Phys. **8**, p. 165, Tabla I, Fig. 2, 1902.

¹¹P. Lenard, ref.[9] p. 150 y p. 166-168.

¹²P. Lenard, Ann. d. Phys. **12**, p. 469, 1903.

9. SOBRE LA IONIZACIÓN DE LOS GASES POR LUZ ULTRAVIOLETA

Habremos de suponer que en la ionización de un gas por luz ultravioleta se absorbe un cuanto de energía de luz por cada molécula de gas. De aquí se deduce que el trabajo de ionización de una molécula (i.e., el trabajo teóricamente necesario para inducir el proceso de ionización) no puede ser más grande que la energía de un cuanto de energía de luz absorbido capaz de producir este efecto. Si designamos con J el trabajo (teórico) de ionización por equivalente gramo, entonces se obtiene:

$$R\beta\nu \geq J.$$

Sin embargo, según las mediciones de Lenard, la máxima longitud de onda efectiva para el aire es aproximadamente $1,9 \times 10^{-5}$ cm; por lo tanto,

$$R\beta\nu = 6,4 \times 10^{12} \text{ erg} \geq J.$$

También se puede calcular un límite superior para el trabajo de ionización a partir de los potenciales de ionización de gases rarificados. Según J. Stark ⁽¹³⁾, el potencial de ionización más pequeño medido para aire (en ánodos de platino) es aproximadamente 10 volts ⁽¹⁴⁾. Resulta entonces un valor $9,6 \times 10^{12}$ erg como límite superior para J , que es casi igual al valor encontrado arriba. Se deriva aun otra consecuencia cuya prueba experimental me parece de la mayor importancia. Si cada cuanto de energía de luz absorbido ioniza a una molécula, entonces entre la cantidad de luz absorbida L y el número j de moléculas gramo de gas ionizado, debe cumplirse que

$$j = L/R\beta\nu.$$

Si nuestra interpretación es correcta, esta relación debe ser válida para todos los gases, los cuales (para la frecuencia en consideración) no exhiben una absorción notable sin ionización.

¹³J. Stark, *Die Elektrizität in Gasen*, p. 57 (Leipzig, 1902).

¹⁴En el interior de los gases, sin embargo, el potencial de ionización para iones negativos es cinco veces mayor.

SOBRE EL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS PEQUEÑAS SUSPENDIDAS EN UN LÍQUIDO ESTACIONARIO, TAL COMO LO REQUIERE LA TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR DEL CALOR ¹

Albert Einstein

Berna, 11 de Mayo de 1905

En este artículo se mostrará que, de acuerdo a la teoría cinético-molecular del calor, cuerpos visibles de tamaño microscópico suspendidos en un líquido, ejecutarán movimientos de tal magnitud que pueden ser observados fácilmente bajo un microscopio, ello como consecuencia de los movimientos moleculares del calor. Es posible que los movimientos que trataremos aquí sean idénticos al —así llamado— “movimiento browniano molecular”; sin embargo, la información de la que dispongo a este respecto es tan imprecisa que no puedo emitir algún juicio sobre la materia.

Si el movimiento en cuestión se puede realmente observar (junto a las leyes relacionadas que se esperaría encontrar), entonces la termodinámica clásica ya no puede verse como una teoría aplicable con precisión, aun a los cuerpos distinguibles al microscopio. Así pues, sería posible lograr una determinación exacta de las dimensiones atómicas reales. Por otra parte, si la predicción de dicho movimiento probara ser incorrecta, se tendría un argumento de peso contra la concepción cinético-molecular del calor.

1. SOBRE LA PRESIÓN OSMÓTICA QUE DEBE ATRIBUIRSE A LAS PARTÍCULAS EN SUSPENSIÓN

Sean z moléculas-gramo de un líquido no-electrolítico disueltas en un volumen V^* formando parte de una cantidad de líquido de volumen total V . Si el volumen V^* se separa del solvente por una membrana permeable al solvente pero impermeable al soluto, entonces aparece una “presión osmótica” p sobre esta pared, cuyo valor satisface la ecuación

$$pV^* = RTz,$$

siempre que V^*/z sea suficientemente grande.

Por otra parte, si en el volumen fraccional V^* se encuentran suspendidas pequeñas partículas en lugar de la

sustancia disuelta (donde tales partículas tampoco pueden atravesar la membrana permeable al solvente), entonces, de acuerdo a la teoría clásica de la termodinámica —y en tanto se ignore la fuerza de gravedad (que no nos interesa aquí)— no esperaríamos encontrar fuerza alguna actuando sobre la membrana ya que, según los conceptos usuales, la “energía libre” del sistema parece ser independiente de las posiciones de las partículas suspendidas y de la membrana, y en su lugar depende solamente de la masa total y de las cualidades del material en suspensión (líquido y membrana), así como de la presión y de la temperatura. De hecho, para calcular la energía libre se debe considerar además la energía y la entropía de la superficie fronteriza, lo que comprende fuerzas de tensión superficial. Pero estas fuerzas se pueden excluir si el tamaño y condición de las superficies de contacto no se alteran con los cambios de posición de la membrana permeable y de las partículas suspendidas en consideración.

Sin embargo, desde el punto de vista de la teoría cinético-molecular del calor, se llega a un concepto diferente. De acuerdo a esta teoría, una molécula disuelta se diferencia de un cuerpo en suspensión *solamente* por sus dimensiones, así que no se ve cómo un número de partículas suspendidas no producirían la misma presión osmótica que el mismo número de moléculas. Debemos suponer que las partículas suspendidas ejecutan, como un resultado del movimiento molecular del líquido, un movimiento irregular —aun si éste es muy lento— en el seno del líquido. Si estas partículas están impedidas de abandonar el volumen V^* debido a la membrana permeable, entonces éstas ejercerán una presión sobre la membrana tal como lo hacen las moléculas en la solución. Luego, si en el volumen V^* hay n partículas suspendidas de tal forma que $n/V^* = v$ en una unidad de volumen, y si las partículas vecinas están suficientemente alejadas, entonces habrá una presión osmótica p dada por

$$p = \frac{RTn}{V^*N} = \frac{RTv}{N},$$

donde N es el número de moléculas contenidas en una molécula-gramo de sustancia. En el siguiente párrafo se mostrará que la teoría cinético-molecular del calor conduce a esta concepción más amplia sobre la presión osmótica.

¹Traducción realizada por Diego Sanjinés C. a partir de “On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Heat”, A. Einstein, en *Investigations on the Theory of the Brownian Movement* (Dover, 1956), p. 1.

2. LA PRESIÓN OSMÓTICA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR DEL CALOR ⁽²⁾

Si p_1, p_2, \dots, p_l son las variables de estado de un sistema físico que definen completamente la condición instantánea del sistema (e.g., las coordenadas y componentes de las velocidades de todos los átomos del sistema), y si el sistema completo de ecuaciones que describen el cambio de dichas variables de estado está dado por

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = \phi_\nu(p_1, p_2, \dots, p_l), \quad (\nu = 1, 2, \dots, l)$$

de donde

$$\sum \frac{\partial \phi_\nu}{\partial p_\nu} = 0,$$

entonces la entropía del sistema está dada por la expresión

$$S = \frac{\langle E \rangle}{T} + 2x \ln \int e^{-E/2xT} dp_1 \dots dp_l,$$

donde T es la temperatura absoluta, $\langle E \rangle$ es la energía del sistema y E es la energía como función de p_ν . La integral se extiende sobre todos los valores posibles de p_ν que son consistentes con las condiciones del problema. La variable x se relaciona con la constante N ya referida a través de la relación $2xN = R$. Se obtiene así para la energía libre F :

$$F = -\frac{RT}{N} \ln \int e^{-EN/RT} dp_1 \dots dp_l = -\frac{RT}{N} \ln B.$$

Consideremos a continuación una cantidad de líquido de volumen V . Sean n moléculas de soluto (o partículas suspendidas) en la porción V^* del volumen total V , que permanecen en V^* por una membrana semipermeable. Así, los límites de integración de la integral B que aparece en las expresiones para S y F se modificarán correspondientemente. El volumen combinado de las moléculas de soluto se supone pequeño comparado con V^* . Este sistema estará completamente determinado de acuerdo a la teoría en cuestión a través de las variables p_1, \dots, p_l .

Si el esquema molecular se extendiera para tratar a cada unidad elemental, el cálculo de la integral B sería tan complicado que el cálculo exacto de F sería apenas posible. Así pues, sólo necesitamos saber cómo depende F de la magnitud del volumen V^* en el que están contenidas las moléculas del soluto (denominadas por brevedad "partículas").

Denominaremos x_1, y_1, z_1 a las coordenadas del centro de masa de la primera partícula, x_2, y_2, z_2 para la

segunda partícula, etc., hasta x_n, y_n, z_n para la última partícula; coloquemos cada centro de masa dentro de un paralelepípedo infinitesimal de dimensiones $dx_1 \times dy_1 \times dz_1, dx_2 \times dy_2 \times dz_2, \dots$ y $dx_n \times dy_n \times dz_n$ respectivamente, encontrándose todos estos paralelepípedos dentro de un volumen V^* . Se buscará el valor de la integral que aparece en la expresión para F , con la limitación de que los centros de masa de las partículas se encuentren dentro del dominio definido previamente. Así, la referida integral da lugar a

$$dB = dx_1 dy_1 \dots dz_n J,$$

donde J es independiente de dx_1, dy_1, \dots , como también de V^* , i.e., de la posición de la membrana semipermeable. Pero también J es independiente de cualquier elección especial de las posiciones de los dominios de los centros de masa y del valor de V^* , como se mostrará a continuación. Si se diera un segundo sistema de partículas con dominios infinitesimales de dimensiones $dx'_1 \times dy'_1 \times dz'_1, dx'_2 \times dy'_2 \times dz'_2, \dots$ y $dx'_n \times dy'_n \times dz'_n$, de tal forma que éstos difieran de los dominios originales en su posición pero no en su tamaño, y se encuentren igualmente contenidos en V^* , entonces se cumple una relación análoga

$$dB' = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n J',$$

de donde $dx_1 dy_1 \dots dz_n = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n$. Por lo tanto

$$\frac{dB}{dB'} = \frac{J}{J'}.$$

Pero de la teoría cinético molecular publicada anteriormente ⁽³⁾ se deduce fácilmente que dB/B (o bien dB'/B') es igual a la probabilidad de que en un instante arbitrario los centros de masa de las partículas estén incluidos en los dominios $dx_1 \dots dz_n$ o $dx'_1 \dots dz'_n$ respectivamente. Luego, si los movimientos de las partículas individuales son aproximadamente independientes entre sí, y si el líquido es homogéneo y no ejerce fuerzas sobre las partículas, entonces para dominios del mismo tamaño las probabilidades de cada sistema serán iguales, de forma que se cumple

$$\frac{dB}{B} = \frac{dB'}{B'}.$$

De esta ecuación y de la precedente sigue que $J = J'$. Demostramos así que J es independiente de V^* y de x_1, y_1, \dots, z_n . Integrando se obtiene

$$B = \int J dx_1 \dots dz_n = J V^* n;$$

por lo tanto

$$F = -\frac{RT}{N} (\ln J + n \ln V^*),$$

y

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V^*} = \frac{RTn}{V^*N} = \frac{RT\nu}{N}.$$

²En esta sección se supondrá que los artículos del autor sobre "Los Fundamentos de la Termodinámica" son conocidos por el lector (Ann. d. Phys. **9**, p. 417, 1902; **11**, p. 170, 1903.) Sin embargo, el entendimiento de las conclusiones a las que se llega en este artículo no depende del conocimiento de los artículos mencionados o de esta sección.

³A. Einstein, Ann. d. Phys. **11**, p. 170, 1903.

Se ha mostrado pues que la existencia de una presión osmótica puede deducirse de la teoría cinético-molecular del calor, y —hasta donde concierne al fenómeno de la presión osmótica— las moléculas del soluto y las partículas suspendidas son, de acuerdo a esta teoría, idénticas en su comportamiento cuando están muy diluidas.

3. TEORÍA DE LA DIFUSIÓN DE PEQUEÑAS ESFERAS EN SUSPENSIÓN

Supóngase un conjunto de partículas suspendidas dispersadas de manera irregular en el seno de un líquido. Consideraremos su estado de equilibrio dinámico bajo la suposición que sobre cada partícula actúa una fuerza K que depende de la posición pero no del tiempo. Se supondrá por simplicidad que dicha fuerza se ejerce en todo lugar a lo largo del eje X .

Sea ν el número de partículas suspendidas por unidad de volumen; así, bajo la condición de equilibrio dinámico, ν es una función de la coordenada x de tal forma que la variación de energía libre se anula para un desplazamiento virtual arbitrario δx de la sustancia en suspensión. Por lo tanto,

$$\delta F = \delta E - T\delta S = 0.$$

Se supondrá que el líquido tiene una sección transversal de área unitaria perpendicular al eje X y limitada por los planos $x = 0$ y $x = l$. Así, tenemos que

$$\delta E = - \int_0^l K\nu\delta x dx$$

y

$$\delta S = \int_0^l \frac{R\nu}{N} \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx = - \frac{R}{N} \int_0^l \frac{\partial \nu}{\partial x} \delta x dx.$$

Luego, la condición de equilibrio requerida es

$$-K\nu + \frac{RT}{N} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

o bien,

$$K\nu - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Esta última ecuación significa que el equilibrio con la fuerza K se logra a través de las fuerzas derivadas de la presión osmótica.

La ecuación (1) se puede usar para encontrar el coeficiente de difusión de la sustancia en suspensión. Podemos buscar la condición de equilibrio dinámico como una superposición de dos procesos provenientes de dos direcciones opuestas:

1. Un movimiento de la sustancia en suspensión bajo la influencia de la fuerza K que actúa sobre cada partícula en suspensión.

2. Un proceso de difusión que debe verse como el resultado del movimiento irregular de las partículas que se produce por la agitación molecular térmica.

Si las partículas suspendidas tienen forma esférica (con P designando el radio de las esferas) y si el líquido tiene coeficiente de viscosidad k , entonces la fuerza K imparte a cada partícula una velocidad ⁽⁴⁾

$$\frac{K}{6\pi k P},$$

así que pasarán

$$\frac{\nu K}{6\pi k P}$$

partículas por unidad de área y unidad de tiempo. Si, además, D es el coeficiente de difusión de la sustancia suspendida y μ es la masa de la partícula, entonces, como resultado de la difusión, pasarán

$$-D \frac{\partial(\mu\nu)}{\partial x}$$

gramos, o bien,

$$-D \frac{\partial \nu}{\partial x}$$

partículas por unidad de área y unidad de tiempo.

Ya que debe haber equilibrio dinámico, entonces se debe tener

$$\frac{\nu K}{6\pi k P} - D \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Podemos calcular el coeficiente de difusión de las condiciones dadas por (1) y (2) halladas para el equilibrio dinámico. Así, tenemos que

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi k P}.$$

Luego, el coeficiente de difusión de la sustancia en suspensión depende solamente (salvo por las constantes universales y la temperatura absoluta) del coeficiente de viscosidad del líquido y del tamaño de las partículas suspendidas.

4. ACERCA DEL MOVIMIENTO IRREGULAR DE LAS PARTÍCULAS SUSPENDIDAS EN UN LÍQUIDO Y SU RELACIÓN CON LA DIFUSIÓN

A continuación realizaremos una consideración más profunda de los movimientos irregulares que ocurren como consecuencia del movimiento térmico molecular, dando lugar este último al proceso de difusión referido en el párrafo anterior.

Evidentemente, se debe suponer que cada partícula individual ejecuta un movimiento que es independiente del de las demás partículas; los movimientos de una misma partícula en diferentes intervalos de tiempo se deben considerar como procesos independientes mientras dichos intervalos no sean muy pequeños.

⁴Cf. e.g., G. Kirchhoff, "Lectures on Mechanics", Lect. 26, §4.

Introduciremos en nuestra discusión el intervalo temporal τ que se considera muy pequeño comparado con el intervalo temporal observado experimentalmente, pero también se considera que τ es lo suficientemente grande como para que los movimientos de la partícula en dos intervalos consecutivos se puedan tomar como fenómenos independientes.

Supongamos que existe un total de n partículas suspendidas en el líquido. En el intervalo τ las coordenadas x de las partículas individuales se incrementarán en una cantidad Δ (positiva o negativa) que será diferente para cada partícula. Luego, para cada valor correspondiente de Δ será válida una ley probabilística. El número dn de partículas que experimentan durante τ un desplazamiento entre Δ y $\Delta + d\Delta$ estará expresado por

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta,$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1,$$

con ϕ diferente de cero para valores muy pequeños de Δ y con la condición $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$.

A continuación investigaremos cómo el coeficiente de difusión depende de ϕ , restringiéndonos de nuevo al caso en el que ν , el número de partículas por unidad de volumen, depende sólo de x y t .

Indicando por $\nu = f(x, t)$ el número de partículas por unidad de volumen, calcularemos la distribución de partículas en el instante $t + \tau$ a partir de la distribución en el instante t . De la definición de $\phi(\Delta)$ se obtiene fácilmente el número de partículas en el instante $t + \tau$ que están localizadas entre dos planos perpendiculares al eje X que lo cortan en x y $x + dx$. Así, tenemos que

$$f(x, t + \tau)dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta)\phi(\Delta)d\Delta \right) dx.$$

Ya que τ es muy pequeño, podemos escribir

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Podemos aun expandir $f(x + \Delta, t)$ en potencias de Δ :

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

Sustituyendo esta expresión en la integral dentro del paréntesis (ya que sólo los valores pequeños de Δ contribuyen a la misma) se obtiene

$$f + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = f \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta)d\Delta + \dots$$

Ya que $\phi(x) = \phi(-x)$, los términos segundo, cuarto, etc., del lado derecho se anulan, y sólo quedan los términos primero, tercero, etc., donde cada término consecutivo es muy pequeño comparado con el anterior. Recordemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1,$$

y escribamos

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta)d\Delta = D;$$

considerando como términos más significativos el primero y el tercero en el lado derecho, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Ésta es la bien conocida ecuación diferencial de difusión, donde D se reconoce como el coeficiente de difusión.

Aún se puede hacer otra consideración importante relacionada con los métodos utilizados en este trabajo. Hemos supuesto que las partículas individuales están referidas todas al mismo sistema de coordenadas. Pero no debe ser necesariamente así, ya que los movimientos de las partículas son mutuamente independientes. Así que ahora referiremos el movimiento de cada partícula a un sistema de coordenadas cuyo origen concide en $t = 0$ con el centro de masa de la partícula en cuestión; con esta diferencia, $f(x, t)dx$ corresponde ahora al número de partículas cuya coordenada x se incrementó entre los instantes $t = 0$ y $t = t$ por una cantidad que se encuentra entre x y $x + dx$. En este caso la función f y sus cambios deben satisfacer la condición (1).

Luego, para $x \neq 0$ y $t = 0$ es evidente que se debe cumplir

$$f(x, t) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dx = n.$$

Así, el problema en cuestión —que está de acuerdo con el problema de difusión a partir de un punto (ignorando las posibilidades de intercambio entre las partículas difundidas)— está matemáticamente definido de manera completa. Su solución es

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}.$$

Esto significa que la distribución probable de los desplazamientos resultantes en un instante dado t , es la misma que la distribución del error aleatorio, lo que era de esperar. Es importante notar cómo las constantes de la función exponencial están relacionadas con el coeficiente de difusión.

Con ayuda de esta última ecuación calcularemos el desplazamiento λ_x en la dirección de X que experimenta en promedio una partícula o, expresado con mayor

precisión, la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los desplazamientos a lo largo del eje X:

$$\lambda_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt}.$$

Así, el desplazamiento promedio es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo. Se puede mostrar fácilmente que la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los desplazamientos totales tiene valor $\sqrt{3} \lambda_x$.

5. FÓRMULA PARA EL DESPLAZAMIENTO MEDIO DE LAS PARTÍCULAS SUSPENDIDAS. UN NUEVO MÉTODO PARA DETERMINAR EL TAMAÑO REAL DEL ÁTOMO

En la sección 3 encontramos la fórmula para el coeficiente de difusión D de un material suspendido en un líquido en la forma de esferas pequeñas de radio P :

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi kP}.$$

Luego, en la sección 4 hallamos el valor medio del desplazamiento de las partículas en la dirección X durante un tiempo t :

$$\lambda_x = \sqrt{2Dt}.$$

Eliminando D de las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\lambda_x = \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{t}{3\pi kP}}.$$

Esta ecuación muestra cómo λ_x depende de T , k y P .

A continuación calcularemos la magnitud de λ_x después de un segundo si N se toma como 6×10^{23} de acuerdo con la teoría cinética de los gases. Como líquido se supondrá agua a 17°C ($k = 1,35 \times 10^{-2}$) y el diámetro de las partículas será 0.001 mm. Así, se tiene que

$$\lambda_x = 8 \times 10^{-5} \text{ cm} = 0,8 \text{ micras}.$$

Al cabo de un minuto tendremos pues un desplazamiento medio aproximado de 6 micras.

Por otra parte, la relación hallada puede utilizarse para determinar N :

$$N = \frac{t}{\lambda_x^2} \frac{RT}{3\pi kP}.$$

Espero que algún investigador pueda pronto tener éxito en resolver el problema propuesto en este trabajo, ya que es muy importante en conexión con la teoría del calor.

SOBRE LA ELECTRODINÁMICA DE LOS CUERPOS EN MOVIMIENTO ¹

Albert Einstein

Berna, 30 de Junio de 1905

Se sabe que la teoría electrodinámica de Maxwell —tal como se entiende comúnmente hoy día— al aplicarse a los cuerpos en movimiento, conduce a ciertas asimetrías que no parecen ser inherentes a los fenómenos. Tómese, por ejemplo, la acción electrodinámica recíproca entre un imán y un conductor eléctrico. El fenómeno observable en este caso depende sólo del movimiento relativo entre el imán y el conductor, mientras que la teoría usual establece una diferencia drástica entre los dos casos en los que ya sea el imán o el conductor sean los que se mueven. Si el imán se mueve y el conductor está en reposo, entonces aparece un campo eléctrico en torno al imán con una energía definida, lo que provoca cierta corriente eléctrica en el sitio donde se encuentra el conductor. Sin embargo, si el imán está en reposo y es el conductor el que se mueve, entonces no surge campo eléctrico alguno en torno al imán, pero en el conductor surge una fuerza electromotriz que en sí no comprende una energía correspondiente, pero da lugar —suponiendo igualdad de movimientos relativos en estos dos casos— a corrientes eléctricas del mismo sentido e intensidad que aquellas que eran producidas por las fuerzas eléctricas en el primer caso.

Ejemplos de este tipo, junto con los intentos infructuosos para medir cualquier movimiento de la Tierra respecto a un “medio luminoso”, sugieren que los fenómenos electrodinámicos así como los de la mecánica misma no conllevan propiedades que correspondan a la idea de un estado de reposo absoluto. Dichos ejemplos sugieren más bien que, tal como ya se ha demostrado hasta aproximaciones de primer orden de cantidades pequeñas, las mismas leyes de la electrodinámica y de la óptica deben ser válidas para todos aquellos sistemas de referencia en los que rigen las leyes de la mecánica. Así pues, elevaremos esta conjetura (que se denominará en adelante “Principio de Relatividad”) al estatus de un postulado; asimismo introduciremos otro postulado, que aparentemente es irreconciliable con el primero, y afirma que la luz siempre se propaga en el espacio vacío con una velocidad definida c de manera independiente del estado de movimiento del cuerpo que emite la luz. Estos dos postulados son suficientes para deducir una teoría simple y consistente de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento con base en la teoría de Maxwell para cuerpos estacionarios. La suposición de un “éter luminoso” probará ser superflua en tanto que la teoría que se desarrollará en este trabajo

no requiera un “espacio estacionario absoluto” provisto de ciertas propiedades especiales, como tampoco requiera asignar un vector de velocidad a un punto del espacio vacío en el que los procesos electromagnéticos tienen lugar.

La teoría que se desarrollará tiene por base —así como toda la electrodinámica— la cinemática del cuerpo rígido, ya que las afirmaciones de tal teoría tienen que ver con relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. Una insuficiente consideración de tales aspectos constituye la raíz de las dificultades que encuentra en el presente la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

I. PARTE CINEMÁTICA

1. DEFINICIÓN DE SIMULTANEIDAD

Tomemos un sistema de coordenadas en el que las ecuaciones de la mecánica newtoniana sean válidas. ⁽²⁾ A fin de hacer esta presentación más precisa y distinguir verbalmente este sistema de coordenadas de otros que serán introducidos luego, nos referiremos a dicho sistema como “sistema estacionario”.

Si un punto material está en reposo con respecto a este sistema, su posición se puede definir a través del empleo de procedimientos rigurosos de medición y de los métodos de la geometría euclidiana; esta posición se puede expresar en coordenadas cartesianas. Así, si deseamos describir el *movimiento* del punto material, damos los valores de sus coordenadas como funciones del tiempo. Debemos tener cuidadosamente en cuenta que una descripción matemática de este tipo carece de significado físico a menos que tengamos bien claro lo que entendemos por “tiempo”. Tendremos pues que considerar que todos nuestros razonamientos en los que figura el concepto de tiempo son razonamientos acerca de *eventos simultáneos*. Por ejemplo, si afirmo: “El tren llega a este sitio a las 7:00”, ello significa que la llegada del tren y el hecho de que la aguja pequeña de mi reloj apunte a las 7:00 son eventos simultáneos. ⁽³⁾

Parecería pues posible superar estas dificultades involucradas en la definición de tiempo sustituyendo la frase

²Esto es, hasta una aproximación de primer orden.

³No discutiremos la inexactitud que yace en el concepto de la simultaneidad de dos eventos que ocurren aproximadamente en el mismo sitio, lo que puede eliminarse solamente de manera abstracta.

¹Traducción realizada por Diego Sanjinés C. a partir de “On the Electrodynamics of Moving Bodies”, A. Einstein, en *The Principle of Relativity* (Dover, 1952), p. 37.

“el hecho de que la aguja pequeña de mi reloj apunte a ...” por la palabra “tiempo”. De hecho, tal definición es satisfactoria en lo referente a la definición de un tiempo exclusivo para el sitio donde está localizado el reloj, pero ya no lo es cuando debemos conectar en una secuencia temporal los eventos que ocurren en sitios diferentes, o —lo que viene a ser lo mismo— evaluar los tiempos de eventos que ocurren en sitios distantes del reloj.

Por supuesto, siempre podemos considerar instantes determinados por un observador en reposo junto al reloj en el origen mismo del sistema de coordenadas, y de aquí coordinar las posiciones correspondientes de las manecillas del reloj con señales luminosas emitidas por cada evento que se desea cronometrar y que alcanzan al observador a través del vacío. Sin embargo, esta forma de coordinación tiene la desventaja de no ser independiente del punto de vista del observador con el reloj, tal como lo sabemos de la experiencia. Podemos llegar a una forma de determinación más práctica por medio de la siguiente línea de razonamientos.

Si en el punto A del espacio hay un reloj, un observador en A puede determinar los instantes de los eventos que ocurren en la proximidad inmediata de A haciendo coincidir las posiciones de las manecillas del reloj de manera simultánea con dichos eventos. Supongamos ahora otro punto B del espacio donde se encuentra otro reloj idéntico al que está en A, de tal forma que un observador en B puede asimismo determinar los instantes de los eventos próximos a B. Pero ya no es posible, sin hacer alguna suposición adicional, comparar temporalmente un evento en A con un evento en B. Hasta ahora sólo se definió un “tiempo A” y un “tiempo B”. No se definió pues un tiempo común para A y B; ésto no se puede hacer a menos que establezcamos *por definición* que el tiempo que le toma a la luz viajar de A a B sea igual al tiempo que le toma ir de B a A. Consideremos un rayo de luz que parte de A hacia B en el instante t_A del “tiempo A”, luego se refleja en B hacia A en el instante t_B del “tiempo B”, y así llega de nuevo a A en el instante t'_A del “tiempo A”. Definamos la condición de sincronización de ambos relojes como $t_B - t_A = t'_A - t_B$. Supondremos que esta definición está libre de contradicciones y es aplicable a un número arbitrario de puntos; supondremos también que las siguientes relaciones tienen validez universal:

1. Si el reloj en B se sincroniza con el reloj en A, entonces el reloj en A se sincroniza con el reloj en B.
2. Si el reloj en A se sincroniza con el reloj en B y también con el reloj en C, entonces los relojes en B y en C están sincronizados entre sí.

Así, con la ayuda de ciertos experimentos físicos imaginarios hemos establecido lo que se debe entender por relojes estacionarios sincronizados ubicados en sitios diferentes, y obtuvimos así una definición de los términos

“simultáneo” o “sincronizado” y de “tiempo”. Entonces, el “tiempo” de un evento es aquel que se da simultáneamente con el evento en sí y un reloj estacionario localizado en el sitio del evento, estando este reloj sincronizado para todas las posibles mediciones temporales con un reloj estacionario específico.

De acuerdo con la experiencia, supondremos además que la cantidad

$$c = \frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A}$$

es una constante universal: la velocidad de la luz en el vacío. Es esencial tener una definición de tiempo a través de relojes estacionarios en sistemas de referencia también estacionarios. Al tiempo así definido y apropiado a dichos sistemas le llamaremos “tiempo del sistema estacionario”.

2. SOBRE LA RELATIVIDAD DE LONGITUDES Y TIEMPOS

Las siguientes reflexiones tienen por base el principio de relatividad y el principio de constancia de la velocidad de la luz. Estos principios se definen como sigue:

1. Las leyes por las cuales los estados de los sistemas físicos sufren cambios, no se ven afectadas por estos cambios, ya sea si éstos se refieren a uno o a otro de dos sistemas de coordenadas en movimiento uniforme de traslación.
2. Cualquier haz de luz se mueve en el sistema “estacionario” de coordenadas con una velocidad determinada c , ya sea que el haz sea emitido por un cuerpo estacionario o en movimiento. De aquí,

$$\text{velocidad} = \frac{\text{trayectoria de la luz}}{\text{intervalo temporal}},$$

donde el intervalo temporal se debe tomar de acuerdo a la definición de la sección 1.

Sea una vara rígida estacionaria con longitud l medida de acuerdo a otra vara de comparación también estacionaria. Imaginemos a continuación que el eje de la vara yace a lo largo del eje X de un sistema de coordenadas estacionario, y que éste tiene un movimiento uniforme de traslación paralela con velocidad v a lo largo de X y en la dirección en que aumenta la coordenada x . Nos preguntamos entonces: ¿cuál es la longitud de la vara? Para responder imaginemos que esta longitud se puede conocer mediante las siguientes operaciones: a) El observador se mueve junto a la vara de medición y la vara a ser medida, y realiza esta medición comparando ambas varas, tal como se haría en reposo. b) Por medio de relojes estacionarios puestos a hora en el sistema estacionario y sincronizados de acuerdo a lo indicado en la sección 1, el observador identifica en qué puntos del sistema estacionario están localizados los extremos de la vara

a ser medida en un cierto tiempo. La distancia entre estos puntos, medida de acuerdo a la vara de medición que en este caso está en reposo, es lo que podemos reconocer como “la longitud de la vara”.

De acuerdo con el principio de relatividad, la longitud medida siguiendo la operación (a) —a la que llamaremos “longitud de la vara en el sistema en movimiento”— debe ser igual a la longitud l de la vara estacionaria. A la longitud determinada por la operación (b) la designaremos por “longitud de la vara (en movimiento) en el sistema estacionario” y será calculada sobre la base de nuestros dos principios. Encontraremos que esta longitud difiere de l .

La cinemática común afirma tácitamente que las longitudes determinadas por ambas operaciones (a) y (b) debe ser las mismas; en otras palabras, que un cuerpo rígido en movimiento en un cierto instante t puede ser perfectamente representado es sus aspectos geométricos por el *mismo* cuerpo *en reposo* en una cierta posición. Imaginemos aún que en los extremos A y B de la vara están localizados dos relojes sincronizados con los relojes del sistema estacionario, es decir, que sus lecturas corresponden en cualquier instante al “tiempo del sistema estacionario” en los lugares donde les tocara estar. Estos relojes están pues “sincronizados en el sistema estacionario”. Si junto a cada reloj hubiera un observador en movimiento, cada observador puede aplicar el criterio establecido en la sección 1 para sincronizar ambos relojes: un rayo de luz parte de A en el tiempo t_A ⁽⁴⁾, el rayo se refleja en B en el tiempo t_B , y retorna a A en el tiempo t'_A . Tomando en cuenta el principio de constancia de la velocidad de la luz, encontramos que

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v} \quad \text{y} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v},$$

donde r_{AB} denota la longitud de la vara en movimiento medida desde el sistema en movimiento. Los observadores que van junto a la vara en movimiento encontrarán que sus relojes no estaban sincronizados, mientras que los observadores en el sistema estacionario declararán que los relojes estaban sincronizados.

Vemos pues que no se puede asignar un significado *absoluto* al concepto de simultaneidad, ya que dos eventos que son vistos como simultáneos desde un sistema de coordenadas, ya no lo son cuando se ven desde otro sistema que está en movimiento relativo al primero.

3. TEORÍA DE LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS Y TIEMPOS DE UN SISTEMA ESTACIONARIO A OTRO SISTEMA EN MOVIMIENTO UNIFORME DE TRASLACIÓN RELATIVO AL PRIMERO

Tomemos a dos sistemas de coordenadas en el espacio estacionario, i.e., dos sistemas que están formados cada uno por tres líneas materiales rígidas mutuamente perpendiculares que emergen de un punto. Que los ejes X de ambos sistemas concidan y sus respectivos ejes Y y Z que sean paralelos. En cada sistema habrá una vara rígida de medición y algunos relojes, que serán, en todos los aspectos, idénticos a la vara y relojes del otro sistema. A continuación, supongamos que el origen de uno de estos sistemas (k) tenga una velocidad v dirigida hacia los valores crecientes de x del otro sistema (K); esta velocidad se imparte también a los ejes coordenados y a todos los relojes. En cualquier instante del sistema estacionario (K) corresponderán posiciones definidas de los ejes del sistema en movimiento, y por razones de simetría supondremos que el movimiento de k será tal que los ejes de este sistema serán paralelos a los del sistema estacionario en el tiempo t (donde t denota siempre al tiempo del sistema estacionario).

Imaginemos ahora que se mide el espacio desde el sistema estacionario K por medio de la vara de medición estacionaria, y desde el sistema en movimiento k por medio de la vara que se está moviendo con este sistema; así, obtenemos las coordenadas x, y, z , y ξ, η, ζ respectivamente. El tiempo t del sistema estacionario se determinará para todos los puntos en los que hay relojes por medio de señales de luz de la forma indicada en la sección 1. De manera similar, el tiempo τ del sistema en movimiento se determinará para todos puntos en los que hay relojes en reposo respecto a este sistema, aplicando el método dado en la sección 1, de señales de luz entre los puntos en donde se sitúan estos relojes. Para cualquier conjunto de valores x, y, z, t que definen completamente el sitio y tiempo de un evento en el sistema estacionario, corresponde un conjunto de valores ξ, η, ζ, τ que determinan dicho evento en el sistema k . Nuestra tarea es pues encontrar las ecuaciones que relacionan estos conjuntos de valores.

En primer lugar, está claro que las ecuaciones deben ser *lineales* en vista de las propiedades de homogeneidad que atribuimos al espacio y al tiempo. Si establecemos que $x' = x - vt$ entonces debe ser cierto que un punto que está en reposo en el sistema k tendrá valores de x', y, z , independientes del tiempo. Definamos τ como una función de x', y, z y t . Para hacer ésto tenemos que expresar en ecuaciones el que τ no sea más que el sumario de los datos de los relojes en reposo en el sistema k , los que fueron sincronizados según la regla de la sección 1. Sea un rayo de luz emitido desde el origen del sistema k en el tiempo τ_0 a lo largo del eje X hacia x' ; en el tiempo τ_1 se refleja hacia el origen y llega allí en el tiempo τ_2 .

⁴Por “tiempo” se refiere a “tiempo del sistema estacionario” así como “posiciones de las manecillas del reloj en movimiento situado en los sitios en cuestión”.

Debemos tener pues que $(\tau_0 + \tau_2)/2 = \tau_1$, o, introduciendo los argumentos sobre la función τ y aplicando el principio de constancia de la velocidad de la luz en el sistema estacionario,

$$\frac{1}{2} \left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau \left(0, 0, 0, t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v} \right) \right] \\ = \tau \left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{c-v} \right).$$

Luego, si x' se elige como una cantidad infinitesimal, entonces

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v} \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

esto es,

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Debe notarse que en lugar de elegir al sistema de coordenadas como origen del rayo de luz, pudimos elegir otro punto, de tal forma que la ecuación así obtenida sería válida para todos los posibles valores de x' , y , z . Por un razonamiento análogo —aplicado a los ejes Y y Z — y teniendo en cuenta que la luz siempre se propaga a lo largo de estos ejes con velocidad $\sqrt{c^2 - v^2}$ cuando se mide desde el sistema estacionario, tenemos que

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Ya que τ es una función lineal, sigue que

$$\tau = a \left(t - \frac{vx'}{c^2 - v^2} \right),$$

donde a es una función desconocida de la forma $\phi(v)$, y donde suponemos por simplicidad que en el origen de k , $\tau = 0$ cuando $t = 0$.

Con la ayuda de este resultado determinaremos fácilmente las cantidades ξ , η , ζ , expresando en ecuaciones el hecho de que la luz (tal como lo requiere el principio de constancia de la velocidad de la luz junto con el principio de relatividad) también se propaga con velocidad c al medirse desde el sistema en movimiento. Para un rayo de luz emitido en el instante $\tau = 0$ en la dirección de ξ creciente, se verifica:

$$\xi = c\tau = ac \left(t - \frac{vx'}{c^2 - v^2} \right).$$

Pero el rayo se mueve en relación al punto inicial de k con velocidad $c - v$ al medirse desde el sistema estacionario, así que

$$\frac{x'}{c-v} = t.$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación para ξ se obtiene

$$\xi = \frac{ac^2 x'}{c^2 - v^2}.$$

De manera análoga encontramos que, para los rayos que se mueven a lo largo de los otros ejes, se cumple:

$$\eta = c\tau = ac \left(t - \frac{vx'}{c^2 - v^2} \right)$$

cuando

$$\frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = t, \quad x' = 0.$$

Así,

$$\eta = \frac{acy}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad y \quad \zeta = \frac{acz}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Sustituyendo x' por su valor, se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau &= \phi(v)\beta(t - vx/c^2), \\ \xi &= \phi(v)\beta(x - vt), \\ \eta &= \phi(v)y, \\ \zeta &= \phi(v)z, \end{aligned}$$

donde $\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ y ϕ es aún una función desconocida de v . Si no se hace alguna suposición sobre la posición inicial del sistema en movimiento y sobre el valor cero de τ , entonces habrá que añadir una constante aditiva en el lado derecho de las anteriores ecuaciones.

A continuación tenemos que probar que cualquier rayo de luz, medido desde el sistema en movimiento, se propaga con velocidad c , si, tal como se ha supuesto, esta es la velocidad de propagación de la luz en el sistema estacionario, pues aún no demostramos que el principio de constancia de la velocidad de la luz es compatible con el principio de relatividad.

En el instante $t = \tau = 0$, cuando coinciden los orígenes de los sistemas de coordenadas, se emite desde allí una onda esférica luminosa que se propaga con velocidad c en el sistema K . Si (x, y, z) es un punto de esta onda, entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Transformando esta ecuación para las variables ξ, η, ζ, τ , se obtiene después de un cálculo sencillo:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \tau^2.$$

Así, la onda en cuestión continúa siendo una onda esférica con velocidad c cuando se ve desde el sistema en movimiento. Esto muestra que nuestros dos principios fundamentales son compatibles ⁽⁵⁾.

⁵Las ecuaciones de las transformaciones de Lorentz se pueden deducir directamente de manera más simple a partir de la condición de que, en virtud a dichas ecuaciones, la relación $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ tendrá como consecuencia que $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \tau^2$.

En las ecuaciones de transformación desarrolladas, aún aparece la función desconocida $\phi(v)$ que determinaremos a continuación. Para este propósito introduciremos un tercer sistema de coordenadas K' que se encuentra en estado de movimiento traslacional paralelo al eje X, de tal forma que el origen del sistema k se mueva con velocidad $-v$ a lo largo del eje X. En el instante $t = 0$ los tres orígenes coinciden, y cuando $t = x = y = z = 0$ el tiempo del sistema K' es $t' = 0$. Por una aplicación doble de las ecuaciones de transformación, se obtiene las coordenadas x', y', z' del sistema K' :

$$\begin{aligned} t' &= \phi(-v)\beta(-v)(\tau + v\xi/c^2) = \phi(v)\phi(-v)t, \\ x' &= \phi(-v)\beta(-v)(\xi + v\tau) = \phi(v)\phi(-v)x, \\ y' &= \phi(-v)\eta = \phi(v)\phi(-v)y, \\ z' &= \phi(-v)\zeta = \phi(v)\phi(-v)z. \end{aligned}$$

Ya que las relaciones entre x', y', z' y x, y, z no contienen al tiempo t , los sistemas K y K' están mutuamente en reposo, y por ello está claro que la transformación de K a K' debe ser la transformación idéntica. Así,

$$\phi(v)\phi(-v) = 1.$$

Ahora nos preguntamos sobre el significado de $\phi(v)$. Prestemos atención a la parte del eje Y en el sistema k que se encuentra entre $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$, y $\xi = 0, \eta = l, \zeta = 0, \xi = 0$. Esta parte del eje Y puede verse como una vara que se mueve de forma perpendicular a su eje con velocidad v respecto al sistema K . Sus extremos tiene coordenadas en K :

$$\begin{aligned} x_1 &= vt, & y_1 &= l/\phi(v), & z_1 &= 0; \\ x_2 &= vt, & y_2 &= 0, & z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Luego, la longitud de la vara en K es $l/\phi(v)$. Esto es lo que nos da el significado de $\phi(v)$. Por razones de simetría es evidente que la longitud de una vara modiéndose de forma perpendicular a su eje, tal como se mide desde el sistema estacionario, sólo depende de la velocidad y no de la dirección y sentido del movimiento. Así, la longitud de la vara en movimiento medida desde el sistema estacionario no varía si se intercambia v y $-v$. De aquí sigue que $l/\phi(v) = l/\phi(-v)$, esto es,

$$\phi(v) = \phi(-v).$$

De esta relación y aquella hallada previamente sigue que $\phi(v) = 1$, así que las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{aligned} \tau &= \beta(t - vx/c^2), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

con $\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

4. SIGNIFICADO FÍSICO DE LAS ECUACIONES OBTENIDAS CON RESPECTO AL MOVIMIENTO DE CUERPOS RÍGIDOS Y RELOJES

Consideremos una esfera rígida ⁽⁶⁾ de radio R que está en reposo relativo al sistema en movimiento k , y cuyo centro coincide con el origen de las coordenadas de k . La ecuación de la superficie de esta esfera que se mueve respecto al sistema K con velocidad v es

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

La ecuación de esta superficie expresada en términos de x, y, z en el instante $t = 0$ es

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Esto significa que un cuerpo rígido con forma esférica cuando se mide en reposo, al estar en movimiento y medirse desde el sistema estacionario, tendrá la forma de un elipsoide de revolución con ejes

$$R\sqrt{1 - v^2/c^2}, R, R.$$

Así, mientras las dimensiones Y y Z de la esfera (y de cualquier otro cuerpo rígido sin importar su forma) no se modifican por el movimiento, la dimensión a lo largo de X aparece acortada por un cociente $1:\sqrt{1 - v^2/c^2}$, esto es, mientras mayor es el valor de v , mayor es el efecto del acortamiento. Si $v = c$, todos los objetos en movimiento —vistos desde el sistema “estacionario”— se contraen o colapsan en figuras planas. Para velocidades mayores a las de la luz nuestras deliberaciones carecen ya de sentido; sin embargo, veremos a continuación que, en nuestra teoría, la velocidad de la luz equivale físicamente a una velocidad infinitamente grande. Está claro que el mismo resultado es válido para cuerpos en reposo en el sistema “estacionario”, tal como se los ve desde el sistema en movimiento uniforme.

Imaginemos ahora un reloj que registra el tiempo t cuando está en reposo respecto al sistema estacionario, mientras que registra el tiempo τ cuando está en reposo respecto al sistema en movimiento. Este reloj está localizado en el origen del sistema de coordenadas k y se ajusta para registrar el tiempo τ . Luego nos preguntamos: ¿cuál es el ritmo de este reloj cuando se ve desde el sistema estacionario? Entre las cantidades x, t, τ que se refieren a la posición del reloj, tenemos evidentemente que $x = vt$ y

$$\tau = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Entonces, se cumple que

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = t - (1 - \sqrt{1 - v^2/c^2})t,$$

⁶ Esto es, un cuerpo de forma esférica cuando se ve en reposo.

de donde sigue que el tiempo registrado (visto desde el sistema estacionario) se retrasa $1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}$ segundos por cada segundo, o bien —ignorando magnitudes de cuarto orden y superiores— se retrasa en $v^2/2c^2$ segundos por cada segundo.

De aquí sigue una consecuencia peculiar. Si en los puntos A y B del sistema K hay relojes estacionarios que, vistos desde el sistema estacionario, están sincronizados, y si el reloj en A se mueve con velocidad v hacia B a lo largo de la línea que une A y B, entonces al llegar a B ambos relojes ya no estarán sincronizados, pues el reloj que se movió de A a B se retrasa respecto al reloj en B por $tv^2/2c^2$ (hasta términos de cuarto orden y superiores), donde t es el tiempo de viaje de A a B. De inmediato parece que este resultado es válido aun si el reloj va de A a B a través de una línea poligonal así como cuando los puntos A y B coinciden. Si suponemos que el resultado que se demuestra para una línea poligonal vale asimismo para una línea curva, llegamos al siguiente resultado: si uno de dos relojes sincronizados está en A y se mueve por una curva cerrada a velocidad constante hasta llegar de nuevo a A, siendo t el tiempo de viaje completo, entonces el reloj viajero al llegar a A estará retrasado por $tv^2/2c^2$ segundos respecto al reloj en reposo. De aquí concluimos que un reloj balanceado (⁷) en el ecuador terrestre debe ir más lento, por una cantidad muy pequeña, que un reloj idéntico situado, bajo las mismas condiciones, en alguno de los polos terrestres.

5. COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

Supongamos que en el sistema k , que se mueve con velocidad v a lo largo del eje X del sistema K , se mueve a su vez un punto de acuerdo a las ecuaciones

$$\xi = w_\xi \tau, \quad \eta = w_\eta \tau, \quad \zeta = 0,$$

donde w_ξ y w_η son constantes. A continuación se pide conocer el movimiento del punto con respecto al sistema K . Con ayuda de las ecuaciones de transformación desarrolladas en la sección 3, introducimos las cantidades x, y, z, t en las ecuaciones de movimiento del punto, de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_\xi + v}{1 + vw_\xi/c^2} t, \\ y &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vw_\xi/c^2} w_\eta t, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Así, la ley del paralelogramo de velocidades, de acuerdo a nuestra teoría, es válida sólo hasta la primera aproximación. Establezcamos:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\ w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2, \\ \alpha &= \tan^{-1} w_y/w_x, \end{aligned}$$

⁷ Este no es un reloj de péndulo, que es un sistema físico al que pertenece la Tierra. Este caso tuvo que ser excluido.

donde α es el ángulo entre las velocidades v y w . Después de un sencillo cálculo se obtiene:

$$V = \frac{\sqrt{v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha - (vw \sin \alpha/c)^2}}{1 + vw \cos \alpha/c^2}.$$

Debe señalarse que v y w aparecen de manera simétrica en la anterior expresión. Si w tiene la dirección de X, entonces

$$V = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}.$$

De esta ecuación sigue que la composición de dos velocidades menores que c siempre resulta en una velocidad menor que c . Así, si $v = c - \kappa$, $w = c - \lambda$, con κ y λ positivos y menores que c , entonces

$$V = \frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \kappa\lambda/c} c < c.$$

Además, sigue que la velocidad de la luz c no se puede alterar por una composición con una velocidad menor a la de la luz:

$$V = \frac{c + w}{1 + w/c} = c.$$

Podríamos también obtener la fórmula para V en el caso en que v y w tengan la misma dirección, realizando la composición de dos transformaciones de acuerdo a la sección 3. Si además de los sistemas k y K de la sección 3, introducimos otro sistema de coordenadas k' moviéndose paralelo a k , y cuyo origen se mueve a lo largo del eje X con velocidad w , obtenemos ecuaciones entre las cantidades x, y, z, t y las correspondientes cantidades de k' ; dichas ecuaciones difieren de aquellas encontradas en la sección 3 sólo en que en lugar de v se debe escribir

$$\frac{v + w}{1 + vw/c^2}.$$

Vemos así que estas transformaciones paralelas forman —necesariamente— un grupo.

Hemos deducido pues hasta aquí, las leyes requeridas para la cinemática correspondiente a nuestros dos principios fundamentales. A continuación demostraremos su aplicación a la electrodinámica.

II. PARTE ELECTRODINÁMICA

6. TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL-HERTZ PARA EL ESPACIO VACÍO. ACERCA DE LA NATURALEZA DE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ QUE OCURRE EN UN CAMPO MAGNÉTICO DURANTE EL MOVIMIENTO

Supongamos que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío son válidas en el sistema estacionario

K , de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{c} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde (X, Y, Z) denota al vector de fuerza eléctrica y (L, M, N) denota al vector de fuerza magnética.

Si aplicamos a estas ecuaciones las transformaciones desarrolladas en la sección 3, refiriendo los procesos electromagnéticos al sistema de coordenadas allí introducido que se mueve con velocidad v , obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right) \right], \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right) \right] &= \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right) \right], \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right) \right] - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right) \right], \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right) \right] - \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right) \right] &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right) \right], \end{aligned}$$

con $\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

El principio de relatividad requiere que si las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío son válidas en el sistema K , entonces también deben serlo en el sistema k . Esto es, los vectores de fuerza eléctrica y magnética $-(X', Y', Z')$ y (L', M', N') del sistema en movimiento k , que se definen por sus efectos ponderomotrices sobre las masas eléctrica y magnética respectivamente, deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{c} \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{c} \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{c} \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Es evidente que los sistemas de ecuaciones encontrados para el sistema k deben expresar exactamente lo mismo, ya que ambos son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el sistema K . Además, ya que las ecuaciones de ambos sistemas coinciden, excepto por los símbolos para los vectores, entonces las funciones que aparecen en los sistemas de ecuaciones deben coincidir en sitios correspondientes, salvo por un factor $\psi(v)$ que depende sólo de v y que es común a todas las funciones

de uno de los sistemas de ecuaciones. Así, tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v)X, & L' &= \psi(v)L, \\ Y' &= \psi(v)\beta \left(Y - \frac{v}{c}N \right), & M' &= \psi(v)\beta \left(M + \frac{v}{c}Z \right), \\ Z' &= \psi(v)\beta \left(Z + \frac{v}{c}M \right), & N' &= \psi(v)\beta \left(N - \frac{v}{c}Y \right). \end{aligned}$$

Si ahora construimos el sistema recíproco de ecuaciones, resolviendo primero las anteriores ecuaciones y aplicando luego éstas a la transformación inversa (de k a K) que se caracteriza para la velocidad $-v$, entonces se obtiene $\psi(v)\psi(-v) = 1$ al considerar que los dos sistemas de ecuaciones obtenidos deben ser idénticos. Luego, por razones de simetría⁽⁸⁾, se obtiene $\psi(v) = 1$, así que nuestras ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta \left(Y - \frac{v}{c}N \right), & M' &= \beta \left(M + \frac{v}{c}Z \right), \\ Z' &= \beta \left(Z + \frac{v}{c}M \right), & N' &= \beta \left(N - \frac{v}{c}Y \right). \end{aligned}$$

Para interpretar estas ecuaciones hagamos las siguientes consideraciones. Sea una carga puntual de electricidad con magnitud “uno” cuando se mide desde el sistema estacionario K , i.e, cuando dicha carga está en reposo en el sistema estacionario y ejerce una fuerza de una dina sobre otra carga de igual magnitud a una distancia de 1 cm. Por el principio de relatividad, esta carga eléctrica también tiene magnitud “uno” cuando se mide desde el sistema en movimiento. Si esta cantidad de electricidad está en reposo respecto al sistema estacionario, entonces, por definición, la fuerza que actúa sobre dicha carga es igual el vector (X, Y, Z) . Si esta cantidad de electricidad está en reposo respecto al sistema en movimiento (al menos, durante un instante relevante), entonces la fuerza que actúa sobre la carga, medida desde el sistema en movimiento, es igual al vector (X', Y', Z') . En consecuencia, las primeras tres ecuaciones escritas arriba se pueden expresar en palabras así:

1. Si una carga puntual unitaria está moviéndose en un campo electromagnético, además de la fuerza eléctrica actúa una “fuerza electromotriz” sobre esta carga; si despreciamos los términos multiplicados por la segunda potencia de v/c y potencias mayores, dicha fuerza es igual al producto vectorial de la carga y la fuerza magnética dividida por la velocidad de la luz.

2. Si una carga puntual unitaria está moviéndose en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ésta es igual a la fuerza eléctrica que está presente en el sitio de la carga y que asignamos, por transformación del campo, al sistema de coordenadas que está en reposo respecto a la carga eléctrica (nueva forma de expresión). La analogía es válida para las “fuerzas magnetomotrices”. Vemos que en la teoría desarrollada aquí, la fuerza

⁸ Por ejemplo, si $X = Y = Z = L = M = 0$ y $N \neq 0$, está claro por simetría que cuando v cambia de signo sin cambiar su valor numérico, Y' también debe cambiar de signo sin cambiar su valor numérico.

electromotriz juega meramente el rol de un campo auxiliar, que se debe a la circunstancia de que tanto las fuerzas eléctricas como magnéticas no existen independientemente del estado de movimiento del sistema de coordenadas.

Está claro además, que la asimetría mencionada en la introducción de este trabajo, surgida como consecuencia de las corrientes producidas por el movimiento relativo de un imán y un conductor, ahora desaparece. Por lo tanto, cuestiones tales como cuál es el asiento de las fuerzas electromotrices (máquinas unipolares), ya no tienen sentido.

7. TEORÍA DEL EFECTO DOPPLER Y DE LA ABERRACIÓN

En el sistema K , muy lejos del origen del sistema de coordenadas, supongamos que existe una fuente de ondas electromagnéticas que, en la parte del espacio que contiene al origen del coordenadas, se puede representar hasta un grado suficiente de aproximación por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \phi, & L &= L_0 \sin \phi, \\ Y &= Y_0 \sin \phi, & M &= M_0 \sin \phi, \\ Z &= Z_0 \sin \phi, & N &= N_0 \sin \phi, \end{aligned}$$

donde

$$\phi = \omega[t - (lx + my + nz)/c].$$

Aquí, (X_0, Y_0, Z_0) y (L_0, M_0, N_0) son vectores que definen la amplitud del tren de ondas, y l, m, n son los cosenos directores de la dirección de propagación de las ondas. A continuación nos preguntamos sobre la constitución de estas ondas cuando se examinan por un observador en reposo en el sistema en movimiento k .

Aplicando las ecuaciones de transformación halladas en la sección 6 para las fuerzas eléctricas y magnéticas, y las ecuaciones de la sección 3 para las coordenadas y el tiempo, se obtiene directamente:

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \phi', & L' &= L_0 \sin \phi', \\ Y' &= \beta(Y_0 - vN_0/c) \sin \phi', & M' &= \beta(M_0 + vZ_0/c) \sin \phi', \\ Z' &= \beta(Z_0 + vM_0/c) \sin \phi', & N' &= \beta(N_0 - vY_0/c) \sin \phi', \\ \phi' &= \omega'[\tau - (l'\xi + m'\eta + n'\zeta)/c], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\beta(1 - lv/c), \\ l' &= \frac{l - v/c}{1 - lv/c}, \\ m' &= \frac{m}{\beta(1 - lv/c)}, \\ n' &= \frac{n}{\beta(1 - lv/c)}. \end{aligned}$$

De la ecuación para ω' sigue que sin un observador se mueve con velocidad v respecto a una fuente de luz de frecuencia ν e infinitamente distante, de tal forma que la línea "fuente-observador" forme un ángulo ϕ con la velocidad del observador referida a un sistema de coordenadas que está en reposo respecto a la fuente de luz, entonces la frecuencia ν' de la luz percibida por el observador está dada por

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos \phi v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Esta ecuación representa al efecto Doppler para velocidades cualesquiera. Cuando $\phi = 0$, la ecuación anterior toma la forma

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Vemos pues que, en contraste con el punto de vista habitual, cuando $v = -c$, entonces $\nu' = \infty$.

Si designamos por ϕ' al ángulo entre la dirección de propagación de las ondas en el sistema en movimiento y la línea "fuente-observador", entonces la ecuación para l' toma la forma

$$\cos \phi' = \frac{\cos \phi}{1 - \cos \phi v/c}.$$

Esta ecuación expresa la ley de aberración en su forma más general. Si $\phi = \pi/2$, la ecuación se transforma en

$$\cos \phi' = -v/c.$$

Aún tenemos que encontrar la amplitud de las ondas tal como se ven desde el sistema en movimiento. Si designamos por A o A' a la amplitud de la fuerza eléctrica o magnética respectivamente, según se mida desde el sistema estacionario o en movimiento, obtenemos

$$A'^2 = A^2 \frac{(1 - \cos \phi v/c)^2}{1 - v^2/c^2},$$

que, para $\phi = 0$, se simplifica a

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

De estos resultados sigue que, para un observador que se aproxima con velocidad c a una fuente de luz, dicha fuente parece tener una intensidad infinita.

8. TRANSFORMACIÓN DE LA ENERGÍA DE LOS RAYOS LUMINOSOS. TEORÍA DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN EJERCIDA SOBRE REFLECTORES PERFECTOS

La energía de la luz por unidad de volumen es $A^2/8\pi$, así que, por el principio de relatividad, $A'^2/8\pi$ debe ser

la densidad de energía medida desde un sistema en movimiento. El cociente A'^2/A^2 sería pues la razón de la “medida en movimiento” y la “medida en reposo” de la energía de un cierto ente luminoso, si el volumen de dicho ente fuera el mismo, ya sea que se mida en K o en k . Pero este no es el caso. Si l, m, n son los cosenos directores del rayo de luz en el sistema estacionario, ninguna energía atraviesa los elementos de área de una superficie esférica que se mueve con la velocidad de la luz; la ecuación de esta superficie es

$$(x - lct)^2 + (y - mct)^2 + (z - nct)^2 = R^2.$$

Así, podemos afirmar que esta superficie contiene permanentemente al mismo ente luminoso. Nos preguntamos ahora cuál es la cantidad de energía contenida por esta superficie cuando se ve desde el sistema k , es decir, la energía del ente luminoso con respecto al sistema k .

la superficie esférica, cuando se ve desde el sistema en movimiento, se convierte en una superficie elipsoidal, cuya ecuación en el instante $\tau = 0$ es:

$$(\beta\xi - l\beta\xi v/c)^2 + (\eta - m\beta\xi v/c)^2 + (\zeta - n\beta\xi v/c)^2 = R^2.$$

Si designamos por S al volumen de la esfera y por S' al volumen del elipsoide, entonces se obtiene

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \cos\phi v/c}.$$

Luego, si E es la energía contenida por esta superficie en el sistema estacionario, y E' es la correspondiente energía en el sistema en movimiento, tenemos que

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2 S'}{A^2 S} = \frac{1 - \cos\phi v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

que, para $\phi = 0$, se simplifica a

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Debe notarse que la energía y la frecuencia de un ente energético varían según la misma ley, de acuerdo al estado de movimiento del observador.

Supongamos a continuación que el plano $\xi = 0$ consiste de una superficie reflejante perfecta, donde se reflejan las ondas consideradas en la sección 7. Queremos calcular la presión que ejerce la luz sobre la superficie reflejante, así como la dirección, frecuencia e intensidad de la luz reflejada. Sean las cantidades A , $\cos\phi$ y ν (referidas al sistema K) que caracterizan a la luz incidente. Desde el sistema k las correspondientes cantidades son:

$$\begin{aligned} A' &= A \frac{1 - \cos\phi v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ \cos\phi' &= \frac{\cos\phi - v/c}{1 - \cos\phi v/c}, \\ \nu' &= \nu \frac{1 - \cos\phi v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Para la luz reflejada, refiriéndonos al sistema k , se obtiene:

$$\begin{aligned} A'' &= A', \\ \cos\phi'' &= -\cos\phi', \\ \nu'' &= \nu'. \end{aligned}$$

Finalmente, transformando las expresiones de nuevo al sistema K , obtenemos para la luz reflejada:

$$\begin{aligned} A''' &= A'' \frac{1 + \cos\phi'' v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = A \frac{1 - 2\cos\phi v/c + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}, \\ \cos\phi''' &= \frac{\cos\phi'' + v/c}{1 + \cos\phi'' v/c} = -\frac{(1 + v^2/c^2)\cos\phi - 2v/c}{1 - 2\cos\phi v/c + v^2/c^2}, \\ \nu''' &= \nu'' \frac{1 + \cos\phi'' v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \nu \frac{1 - 2\cos\phi v/c + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

La energía que, medida desde el sistema estacionario, incide sobre un área unitaria de la superficie reflejante en un lapso unitario, es evidentemente $A^2(c \cos\phi - v)/8\pi$. La energía que se refleja de esta área en un lapso unitario es $A'''^2(-c \cos\phi''' + v)/8\pi$. La diferencia entre estos dos términos es, por el principio de energía, el trabajo hecho por la presión de la luz durante un lapso unitario. Así, si designamos a este trabajo como el producto Pv , donde P es la presión de la luz, obtenemos

$$P = 2 \frac{A^2 (\cos\phi - v/c)^2}{8\pi (1 - v^2/c^2)},$$

que se reduce, hasta una primera aproximación, a

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2\phi,$$

lo que está de acuerdo con los experimentos y con otras teorías.

Así, todos los problemas sobre la óptica de los cuerpos en movimiento se pueden resolver por el método empleado aquí. Lo esencial es que la fuerza eléctrica y magnética de la luz, fuerza que es afectada por el cuerpo en movimiento, se transforme a un sistema de coordenadas en reposo respecto al cuerpo. De esta forma, todos los problemas de la óptica de los cuerpos en movimiento se reducen a problemas de óptica para cuerpos estacionarios.

9. TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL-HERTZ CUANDO SE TOMA EN CUENTA CORRIENTES CONVECTIVAS

Comencemos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + u_x \rho \right) &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + u_y \rho \right) &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{c} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + u_z \rho \right) &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

denota 4π veces la densidad de corriente eléctrica y (u_x, u_y, u_z) denota al vector velocidad de la carga. Si imaginamos a las cargas eléctricas unidas a pequeños cuerpos rígidos (iones, electrones), las anteriores ecuaciones constituyen la base electromagnética de la teoría electrodinámica de Lorentz, así como de la óptica de los cuerpos en movimiento

Supongamos que estas ecuaciones son válidas en el sistema K , y las transformamos al sistema k con la ayuda de las ecuaciones de transformación dadas en las secciones 3 y 6. Obtenemos así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial X'}{\partial \tau} + u_\xi \rho' \right) &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{c} \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial Y'}{\partial \tau} + u_\eta \rho' \right) &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{c} \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial Z'}{\partial \tau} + u_\zeta \rho' \right) &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{c} \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}, \\ u_\eta &= \frac{u_y}{\beta(1 - u_x v / c^2)}, \\ u_\zeta &= \frac{u_z}{\beta(1 - u_x v / c^2)}, \end{aligned}$$

y

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta(1 - u_x v / c^2) \rho.$$

Ya que —como se deduce del teorema de adición de velocidades (sección 5)— el vector (u_ξ, u_η, u_ζ) no es más que la velocidad de la carga eléctrica medida desde el sistema k , tenemos pues la prueba, sobre la base de nuestros principios cinemáticos, de que los fundamentos de la teoría de Lorentz sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento está de acuerdo con el principio de la relatividad.

Añadiré brevemente que de las anteriores ecuaciones se puede deducir de una manera sencilla la siguiente ley importante: si una carga eléctrica está en movimiento en cualquier lugar del espacio, sin alterar su magnitud al medirse desde un sistema de coordenadas que se mueve junto al cuerpo, entonces dicha carga permanece constante al medirse desde el sistema estacionario K .

10. DINÁMICA DEL ELECTRÓN LENTAMENTE ACELERADO

Supongamos que una partícula eléctrica con carga ε (llamada “electrón” en lo sucesivo) se mueve en un campo electromagnético, de tal forma que obedece la siguiente ley de movimiento: si el electrón está en reposo en un

cierto instante, su movimiento en el siguiente instante está dado por

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon X, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \varepsilon Y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \varepsilon Z, \end{aligned}$$

donde x, y, z denotan las coordenadas del electrón y m es su masa en tanto su movimiento sea lento. Si la velocidad del electrón es v en un cierto instante, queremos conocer la ley de movimiento del electrón para los instantes inmediatamente posteriores.

Sin afectar el carácter general de nuestras consideraciones, supondremos que el electrón, un cierto instante relevante, se encuentra en el origen del coordenadas y se mueve con velocidad v a lo largo del eje X del sistema K . Está claro pues que en ese instante ($t = 0$) el electrón está en reposo respecto al sistema de coordenadas que se mueve paralelamente con velocidad v a lo largo del eje X . De esta suposición, junto con el principio de relatividad, está claro que para los siguientes instantes inmediatos (valores de t pequeños), el electrón, visto desde el sistema k , se moverá de acuerdo a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= \varepsilon X', \\ m \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= \varepsilon Y', \\ m \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} &= \varepsilon Z', \end{aligned}$$

donde los símbolos $\xi, \eta, \zeta, X', Y', Z'$ se refieren al sistema k . Si además decidimos que cuando $t = x = y = z = 0$ entonces $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, las ecuaciones de transformación de las secciones 3 y 6 son válidas, de tal forma que

$$\begin{aligned} \tau &= \beta(t - vx/c^2), \\ \xi &= \beta(x - vt), & X' &= X, \\ \eta &= y, & Y' &= \beta(Y - vN/c), \\ \zeta &= z, & Z' &= \beta(Z + vM/c). \end{aligned}$$

Con la ayuda de estas ecuaciones, transformamos las ecuaciones de movimiento del electrón del sistema k al sistema K y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta^3} X, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta} (Y - vN/c), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta} (Z + vM/c). \end{aligned} \tag{1}$$

Nos preguntamos ahora, de acuerdo al punto de vista usual, cuál es la masa “longitudinal” y cuál es la masa

“transversal” del electrón en movimiento. Para responder re-escribimos las ecuaciones (1) en la forma

$$\begin{aligned} m\beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X', \\ m\beta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} &= \varepsilon\beta(Y - vN/c) = \varepsilon Y', \\ m\beta^2 \frac{d^2 z}{dt^2} &= \varepsilon\beta(Z + vM/c) = \varepsilon Z', \end{aligned}$$

y recalcamos que $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúa sobre el electrón, tal como se ven en ese momento desde el sistema que se mueve junto al electrón (esta fuerza se puede medir, por ejemplo, por un resorte en reposo en este último sistema). Si llamamos a esta fuerza simplemente “la fuerza que actúa sobre el electrón”⁹ y mantenemos la ecuación *masa × aceleración = fuerza*, midiendo las aceleraciones en el sistema estacionario K , obtenemos de las anteriores ecuaciones que

$$\begin{aligned} \text{masa longitudinal} &= \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ \text{masa transversal} &= \frac{m}{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

Con otra definición de fuerza, naturalmente deberíamos obtener otros valores para las masas. Esto nos muestra que al comparar diferentes teorías sobre el movimiento del electrón, debemos proceder con mucha cautela.

Señalemos que estos resultados referidos a la masa también son válidos para puntos materiales ponderables, ya que un punto material ponderable puede convertirse en un electrón (de acuerdo a nuestro sentido de esta palabra) añadiéndole una carga eléctrica, *sin importar cuán pequeña*.

A continuación calcularemos la energía cinética del electrón. Si éste se mueve a partir del reposo en el origen de coordenadas del sistema K a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza electrostática X , está claro que la energía tomada del campo electrostático tiene el valor $\int \varepsilon X dx$. Ya que el electrón se acelerará lentamente, y en consecuencia no emitirá energía en forma de radiación, entonces la energía tomada del campo debe ser igual a la energía de movimiento W del electrón. Teniendo en cuenta que durante todo este proceso es válida la primera de las ecuaciones en (1), obtenemos:

$$W = \int \varepsilon X dx = m \int_0^v \beta^3 v dv = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right].$$

Así, cuando $v = c$, W es infinito. Por lo tanto, las velocidades mayores a la de la luz —como en nuestros resultados previos— no tienen posibilidad de existir. La

expresión encontrada para la energía cinética debe, por el argumento dado antes, aplicarse asimismo a las masas ponderables.

A continuación enumeraremos las propiedades que resultan del sistema de ecuaciones (1) para el movimiento de un electrón, siendo estas propiedades accesibles a la experimentación.

1. De la segunda ecuación del sistema (1) sigue que una fuerza eléctrica Y y una fuerza magnética N , cuando $Y = Nv/c$, tienen acciones deflectivas igualmente intensas sobre un electrón con velocidad v . Vemos pues que es posible, de acuerdo a nuestra teoría, determinar la velocidad de un electrón a partir del cociente entre la intensidad de deflexión magnética A_m y la intensidad de deflexión eléctrica A_e (para cualquier velocidad), aplicando la ley

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{c}.$$

Esta relación puede verificarse experimentalmente, ya que la velocidad del electrón se puede medir de manera directa, por ejemplo, por medio de campos eléctricos y magnéticos rápidamente oscilantes.

2. De la deducción de la energía cinética del electrón, sigue directamente que entre la diferencia de potencial P y la velocidad v adquirida por el electrón debe darse la relación

$$P = \int X dx = \frac{m}{\varepsilon} c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right].$$

3. Calculemos ahora el radio de curvatura de la trayectoria seguida por el electrón cuando está presente una fuerza magnética N (sólo como una fuerza deflectiva) que actúa perpendicularmente sobre la velocidad del electrón. De la segunda ecuación del sistema (1) obtenemos

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{e}{m} \frac{v}{c} N \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

o bien

$$R = \frac{mc^2}{\varepsilon} \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{N}.$$

Estas tres relaciones constituyen, según la teoría presentada en este trabajo, la expresión completa de las leyes de acuerdo a las que el electrón se debe mover.

Para concluir, deseo decir que al trabajar en el problema tratado aquí, tuve la asistencia leal de mi amigo y colega M. Besso, con quien quedo en deuda por varias sugerencias valiosas.

⁹La definición de fuerza dada aquí no es conveniente, tal como lo señaló por primera vez M. Planck. Es más adecuado definir a la fuerza de tal manera que las leyes del *momentum* y la energía tomen su forma más simple.

¿DEPENDE LA INERCIA DE UN CUERPO DE SU CONTENIDO ENERGÉTICO? ¹

Albert Einstein

Berna, 27 de Septiembre de 1905

Los resultados de la investigación previa llevan a una conclusión muy interesante que se deducirá en este trabajo. Dicha investigación tuvo como base las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío y la expresión de Maxwell para la energía electromagnética del espacio. Adicionalmente se tenía el principio de relatividad: *las leyes por la que se modifican los estados de los sistemas físicos, son independientes de la elección de cualquiera de dos sistemas de coordenadas que están en movimiento paralelo de traslación respecto uno del otro, y a las cuales se refieren dichas modificaciones de estado.*

Con estos principios ⁽²⁾ como base de mis investigaciones, deduje, *inter alia*, el siguiente resultado (sección 8): Sea un sistema de ondas planas luminosas que, referidas al sistema de coordenadas (x, y, z) posee energía l ; supongamos que la dirección del haz luminoso forma un ángulo ϕ con el eje X del sistema. Si se introduce un nuevo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) con movimiento uniforme de traslación paralela con respecto al sistema (x, y, z) , cuyo origen se mueve a lo largo de la coordenada x con velocidad v , entonces la energía de la luz medida en el sistema (ξ, η, ζ) es

$$l^* = l \frac{1 - \cos \phi v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde c denota a la velocidad de la luz. Haremos uso de este resultado en lo que sigue.

Supongamos que un cuerpo estacionario se encuentra en el sistema (x, y, z) y su energía, referida a este sistema, es E_0 . La energía de este cuerpo con respecto al sistema (ξ, η, ζ) que se mueve con velocidad v será H_0 . Ahora supongamos que este cuerpo emite ondas planas luminosas en la dirección que forma el ángulo ϕ con respecto al eje de las x , así como en la dirección opuesta; la energía de estas ondas será $L/2$ al medirse desde el sistema (x, y, z) . El principio de energía debe aplicarse a este proceso con respecto a ambos sistemas de coordenadas (por el principio de relatividad). Llamemos E_1 o H_1 a la energía emitida cuando se mide en el sistema (x, y, z) o (ξ, η, ζ) respectivamente. Así, empleando

la relación dada arriba se obtiene:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1 + L/2 + L/2, \\ H_0 &= H_1 + \frac{1}{2}L \frac{1 - \cos \phi v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{1}{2}L \frac{1 + \cos \phi v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Por sustracción se obtiene:

$$H_0 - E_0 - (H_1 - E_1) = L \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right].$$

Las dos diferencias de forma de $H - E$ que se encuentra en esta fórmula tienen significados físicos sencillos. H y E son los valores de la energía del mismo cuerpo referida a dos sistemas de coordenadas que se mueven uno con respecto al otro, estando el cuerpo en reposo en uno de estos sistemas (el sistema (x, y, z)). Está claro pues que $H - E$ puede diferir de la energía cinética K del cuerpo, con respecto al sistema (ξ, η, ζ) , por una constante aditiva C que depende de la elección de las constantes aditivas de las energías H y E . Así, podemos escribir

$$\begin{aligned} H_0 - E_0 &= K_0 + C, \\ H_1 - E_1 &= K_1 + C, \end{aligned}$$

ya que C no varía durante la emisión de luz. Tenemos pues:

$$K_0 - K_1 = L \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right].$$

Esto significa que la energía cinética del cuerpo respecto al sistema (ξ, η, ζ) disminuye como resultado de la emisión de luz, y la magnitud de dicha disminución es independiente de las propiedades del cuerpo. Es más: la diferencia $K_0 - K_1$, así como la energía cinética del electrón (sección 10), depende solamente de la velocidad. Despreciando las magnitudes de cuarto orden y órdenes superiores, podemos escribir

$$K_0 - K_1 = \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} v^2.$$

De esta ecuación sigue directamente que: *Si un cuerpo emite una cantidad L de energía en forma de radiación, su masa disminuye en L/c^2 .* El hecho de que la energía emitida por el cuerpo se convierta en energía de radiación, evidentemente no hace diferencia alguna, así que podemos escribir una conclusión más general:

¹Traducción realizada por Diego Sanjinés C. a partir de "Does the Inertia of a Body depend upon its Energy-content?", A. Einstein, en *The Principle of Relativity* (Dover, 1952), p. 69.

²El principio de constancia de la velocidad de la luz ya está comprendido por la ecuaciones de Maxwell.

La masa de un cuerpo es una medida de su contenido energético; si la energía varía en L , entonces la masa varía asimismo en $L/(9 \times 10^{20})$, donde la energía se mide en ergios y la masa en gramos.

No es imposible que en aquellos cuerpos cuyo contenido energético sea muy variable (por ejemplo, sales de radio) esta teoría pueda ser verificada exitosamente. Si la teoría corresponde pues con los hechos, entonces la radiación transmite inercia entre los cuerpos emisores y absorbentes.

AMBIENTE ACÚSTICO DEL CENTRO DE LA CIUDAD DE LA PAZ

W. Tavera, S. Barreta, W. Cano

*Instituto de Investigaciones Físicas – UMSA
Casilla 8635, La Paz – Bolivia*

RESUMEN

Presentamos resultados de mediciones de ruido urbano realizadas en el centro de la ciudad de La Paz con la finalidad de elaborar un mapa acústico. Con un sonómetro tipo 1 previamente calibrado mediante normas internacionales se han adquirido datos de niveles de ruido en diferentes puntos de la ciudad. Los resultados muestran altos niveles de contaminación acústica en varios puntos de la ciudad independientemente de la hora del día.

ABSTRACT

We show results of measurements of urban noise in the downtown of La Paz city in order to elaborate an acoustic map. With a type 1 Sound Level Meter previously calibrated we have performed measurements of noise levels in several points of the city. The results shown high levels of acoustic pollution in several points of the city.

1. INTRODUCCIÓN

La intensa actividad humana concentrada en el centro urbano de la Ciudad de La Paz, el vertiginoso crecimiento de la población y el incremento permanente del número de vehículos que circulan diariamente por sus calles, repercuten de manera directa en el medio ambiente y, consecuentemente, en la calidad de vida de sus habitantes. La exposición a la contaminación acústica es un problema que suscita gran inquietud entre la población de la urbe paceña. En la actualidad, lamentablemente, la escasa legislación sobre ruido ambiental [1,2] no se ajusta de manera apropiada a las características “normales”, del ambiente acústico en el centro de La Paz.

El ruido es uno de los contaminantes más subestimados a pesar de su omnipresencia y su efecto acumulativo sobre la salud. Está comprobado, que el ruido del tráfico rodado es la principal causa de contaminación acústica en ambientes urbanos e interurbanos.

Un mismo sonido, como la música por ejemplo, puede ser percibido como agradable relajante o estimulante, enriquecedor o sublime, por la persona que decide disfrutarla, o bien como una agresión física y mental por otra persona que ve perturbado su descanso.

Por definición, el ruido es un sonido no deseado que interfiere o molesta en algunas actividades. El ruido para ser tal, no necesariamente debe ser muy intenso, como es el caso del ruido de un mosquito volando cerca del oído o las gotas que caen de un grifo por la noche, que pueden producir una gran molestia a pesar de que su nivel sonoro sea muy bajo. Así por ejemplo, el ruido de millones de gotas que forman la lluvia es mucho más intenso y sin embargo es menos molesto y en muchos casos hasta placentero o sedante. La diferencia fundamental entre “sonido” y “ruido” está determinada por un factor subjetivo: “llamamos ruido a todo sonido no deseado”.

El ruido presenta grandes diferencias con respecto a otros contaminantes:

- es el contaminante más barato de producir y necesita muy poca energía para ser emitido.
- es complejo de medir y cuantificar.
- no deja residuos, no tiene un efecto acumulativo en el medio, pero si puede tener un efecto acumulativo en sus efectos en el hombre.
- tiene un radio de acción mucho menor que otros contaminantes, vale decir, es localizado.
- no se traslada a través de los sistemas naturales, como el aire contaminado movido por el viento, por ejemplo.
- se percibe sólo por un sentido: el oído, lo cual hace subestimar su efecto. Esto no sucede con el agua, por ejemplo, donde la contaminación se puede percibir por su aspecto, olor y sabor.

El ruido ambiental produce múltiples y variados efectos sobre el ser humano [3]. Precisamente, por tener el carácter de no deseado, el ruido urbano molesta, incomoda, perturba, produciendo un estado de nerviosismo y estrés, generalmente acompañado de una sensación de frustración e impotencia ante la imposibilidad de desactivar la fuente de ruido.

A diferencia de la vista, nuestro sistema auditivo está siempre abierto al mundo, lo que implica una recepción continua de estímulos y de informaciones sonoras de las que no podemos sustraernos. La exposición a niveles de ruido intenso durante un período de tiempo significativo, da lugar a pérdidas de audición, que si en un principio son recuperables cuando el ruido cesa, con

el tiempo pueden llegar a hacerse irreversibles, convirtiéndose en sordera. A su vez, la exposición a niveles de ruido de mediana intensidad, pero con una prolongación mayor en el tiempo, repercute en forma similar, traduciendo ambas situaciones en desplazamientos temporales o permanentes del umbral de audición. El umbral de audición para un oyente determinado es la presión sonora mínima de un sonido especificado que es capaz de permitir una sensación auditiva. El umbral de audición, puede sufrir desplazamientos temporales y permanentes por la presencia de ruido. El desplazamiento permanente del umbral de audición, es producido por exposiciones prolongadas a niveles superiores a 75 u 80 $dB(A)$, (la Organización Mundial de la Salud recomienda un máximo nivel de exposición al ruido de 65 $dB(A)$) por sonidos de corta duración de entre 110 y 140 $dB(A)$, o por acumulación de fatiga auditiva sin tiempo suficiente de recuperación. Hay lesión del oído interno, se produce inicialmente en frecuencias no conversacionales, por lo que el sujeto no la advierte hasta que es demasiado tarde. Puede ir acompañada de zumbidos de oído (acúfenos) y de trastornos del equilibrio (vértigos). Se vincula directamente con la presbiacusia, término que describe la pérdida de la sensibilidad auditiva debida a los efectos de la edad. La sordera producida es de percepción y simétrica, lo que significa que afecta ambos oídos con idéntica intensidad.

Pero los efectos del ruido van desde molestia, incomodidad y estrés, pasando por perturbación del sueño, hasta complicaciones psicofisiológicas y deterioro de la calidad de vida. Además de las ya señaladas afecciones producidas por el ruido al oído, éste actúa negativamente sobre otras partes del organismo, donde se ha comprobado que bastan 50 a 60 $dB(A)$ para que existan enfermedades asociadas al estímulo sonoro. En presencia de ruido, el organismo adopta una postura defensiva y hace uso de sus mecanismos de protección. Se han podido observar efectos vegetativos como la modificación del ritmo cardíaco y vasoconstricciones del sistema periférico. Entre los 95 y 105 $dB(A)$ se producen afecciones en el riego cerebral, debidas a espasmos o dilataciones de los vasos sanguíneos, además de alteraciones en la coordinación del sistema nervioso central; alteraciones en el proceso digestivo, dadas por secreciones ácidas del estómago las que acarrearán úlceras duodenales, cólicos y otros trastornos intestinales; aumento de la tensión muscular y presión arterial; cambios de pulso en el electroencefalograma; dilatación de la pupila, alterando la visión nocturna, además de estrechamiento del campo visual. Las reacciones fisiológicas al ruido no se consideran patológicas si ocurren en ocasiones aisladas, pero exposiciones prolongadas (por ejemplo, el ruido de tráfico urbano) pueden llegar a constituir un grave riesgo para la salud. Esta comprobado que en los sujetos expuestos al ruido, se produce un incremento significativo en la concentración de la hormona GH , que es uno de los principales marcadores de estrés.

Se han realizado estudios que han determinado que

para asegurar un sueño sin perturbaciones, condición necesaria para el bienestar fisiológico y mental, el nivel de presión sonora no debería exceder los 45 $dB(A)$, lo cual prácticamente es imposible de encontrar en varios puntos de la ciudad. Se han detectado también efectos del ruido en la salud mental e influencias en el desempeño y la productividad de las personas, especialmente en tareas que requieren concentración. Estos efectos, como ya se mencionó en el párrafo anterior, son comprobables por cambios cuantificables en la presión sanguínea, ritmo cardíaco, niveles de secreción endócrina e, inclusive, índices de admisión en hospitales psiquiátricos. La interferencia con la comunicación degrada el nivel de vida directamente, causando trastornos en tareas laborales y sociales. En las calles del centro de La Paz, en las horas pico, es prácticamente imposible mantener una conversación debido al ruido que generan los vehículos de transporte público. La interferencia con la comunicación en interiores también se ve severamente afectada, ya que cuando el nivel de ruido de fondo supera los 45 ó 50 $dB(A)$, las personas se ven forzadas a elevar un poco la voz, e inclusive, a cerrar las ventanas si dicho nivel supera los 70 $dB(A)$. La aparición súbita de un ruido puede producir alteraciones en la conducta, haciendo que una persona se torne momentáneamente agresiva e irritable. El ruido hace más lenta la articulación en la tarea de repaso, especialmente con palabras desconocidas o de mayor longitud. El ruido provoca que la atención se enfoque en los aspectos más importantes en detrimento de aquellos otros aspectos considerados de menor relevancia. Mujeres embarazadas que han estado desde el principio en una zona muy ruidosa tienen niños que no sufren alteraciones, pero si se instalan en estos lugares después de los cinco meses de gestación, luego del parto los niños no soportan el ruido, lloran cada vez que lo sienten, y al nacer su tamaño podría ser inferior al normal. Los niños en un ambiente ruidoso sufren perturbaciones en su capacidad de escuchar y un retraso en el aprendizaje de la lectura. En resumen, es necesario tomar en cuenta que los altos niveles de contaminación acústica están directamente relacionados con una disminución en la calidad de vida de los ciudadanos. Otro aspecto que se maneja en ciudades grandes, difícil de cuantificar, pero que tiene que ver con el ruido contaminante, es la repercusión económica [4].

2. LA CIUDAD DE LA PAZ, A 3600 *m.s.n.m.*

La mayoría de los instrumentos de medida de niveles sonoros, por su fabricación y calibración bajo normas internacionales, están referidos a condiciones normales de presión y temperatura. Se conoce, sin embargo, que la presión afecta el comportamiento del sonido, por lo que se debe introducir correcciones cuando un equipo es usado en regiones, como La Paz, cuyas condiciones de presión y temperatura son totalmente diferentes de las normales [5].

La ciudad de La Paz, además, posee características diferentes a las de muchas ciudades en las que se han de-

sarrollado trabajos de elaboración de mapas acústicos. El parque automotor en La Paz supera los 10^5 vehículos, los mismos que transitan por pocas vías troncales, de manera que en determinados lugares se producen grandes congestionamientos y, por lo tanto, grandes niveles de contaminación acústica. No se debe dejar de mencionar la topografía de la hoyada paceña y las edificaciones altas que predeterminan un ambiente acústico singular en cada calle y avenida. A todo esto se suma la contaminación de ruido ambiental por el mal estado de los vehículos, uso indiscriminado de bocina en las calles, bullicio de vendedores ambulantes y voceadores, centros comerciales, etc.

Por todo lo anteriormente expuesto, la elaboración de un mapa acústico para la ciudad de La Paz, pasa necesariamente por un conocimiento previo de las características de las diferentes zonas y la calidad de las fuentes contaminantes de ruido. Hemos establecido, de manera inicial, un protocolo de mediciones de ruido [5] y un protocolo para elaboración de mapas acústicos. El acuerdo sobre dichos protocolos ha permitido tomar decisiones sobre la manera de realizar las mediciones, discriminar los puntos de medición, el tiempo de cada una, el tipo de tratamiento estadístico de los datos y la interpretación de los indicadores correspondientes.

3. CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DEL SONIDO

En ausencia del sonido, la presión atmosférica alcanza un estado de equilibrio y es constante. El sonido es el resultado de una perturbación que se propaga en un medio elástico. Esta perturbación es una variación de la presión P del aire respecto a la presión de equilibrio, P_o . Físicamente, podemos establecer que el sonido es producido por una variación de presión, que depende del tiempo:

$$p(t) = P - P_o. \quad (1)$$

La variación de presión, $p(t)$, se conoce como *presión sonora instantánea*. Es interesante observar que para los sonidos habituales dicha variación de presión es mucho menor en magnitud que la presión atmosférica. Mientras que la presión atmosférica es del orden de $P_o = 10^5 Pa$, la variación de presión está en el rango:

$$30 \times 10^{-6} Pa < p < 30 Pa.$$

El sonido puede ser descrito a partir de sus principales características físicas: amplitud, frecuencia y patrón temporal.

La amplitud de un sonido es lo que percibimos como “potencia o sonoridad”. En realidad, este término corresponde a la amplitud de las variaciones de presión atmosférica que constituyen el sonido (presión sonora). Por tanto, la presión sonora, es la magnitud que permite medir la amplitud del sonido, y es parte componente fundamental de varios descriptores de ruido.

La velocidad con la que vibra la fuente sonora, y por lo tanto, la velocidad a la que vibra el aire, determina la

frecuencia del sonido, la que se percibe como el tono del sonido. La mayoría de los sonidos están compuestos por una mezcla de tonos, de variada frecuencia y amplitud.

El sonido también puede caracterizarse por sus diferentes patrones temporales: continuo, fluctuante, impulsivo, intermitente. Los sonidos continuos son aquellos que se generan por largos periodos de tiempo a un nivel constante. Los fluctuantes son aquellos cuya amplitud varía en el tiempo, como el producido por el tráfico vehicular urbano. Los impulsivos son aquellos que se caracterizan por tener una duración extremadamente corta de tiempo, como un disparo de arma de fuego. Los sonidos intermitentes son aquellos producidos por intervalos de tiempo relativamente cortos pero de manera reiterada, como el despegue o aterrizaje de aviones en un aeropuerto.

La *presión sonora eficaz*, P_{ef} , se define como el valor cuadrático medio de la presión sonora instantánea $p(t)$, integrado sobre un número entero de periodos:

$$P_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt} \quad (2)$$

El *nivel de presión sonora*, o SPL, se denota con el símbolo L_p , y se expresa en decibeles (dB). El dB no es una unidad de medida, sino una relación logarítmica entre la presión sonora eficaz P_{ef} y una presión de referencia, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{P_{ef}}{P_{ref}}, \quad (3)$$

donde P_{ef} es el valor eficaz de la presión sonora y P_{ref} es la presión de referencia, que tiene un valor de:

$$P_{ref} = 20 \times 10^{-6} Pa. \quad (4)$$

Un incremento de $1 dB$ no representa un incremento fijo de la presión sino un aumento relativo de un $12,2\%$. El valor de P_{ref} se ha elegido porque coincide con el umbral de audición normal para $1 kHz$, lo cual implica que un sonido se puede percibir cuando $L_p > 0 dB$.

La escala logarítmica resulta conveniente, dado el enorme rango de valores que se manejarían con una magnitud lineal. El oído humano posee un rango de respuesta en amplitud extremadamente amplio; puede percibir sonidos desde $0 dB$ (umbral de audición) hasta $120 dB$ (umbral de dolor). Al ser una magnitud logarítmica, es importante notar que la suma de niveles de presión sonora no se realiza sumando aritméticamente los valores en dB . Como ejemplo, supongamos que queremos obtener la suma de dos sonidos cuyos niveles de presión sonora son L_{p1} y L_{p2} , entonces, como la potencia acústica es proporcional a la presión eficaz al cuadrado, para sumar los niveles de presión sonora dados, primeramente debemos expresar estos valores en términos de la presión cuadrática media.

$$P_T^2 = P_1^2 + P_2^2, \quad (5)$$

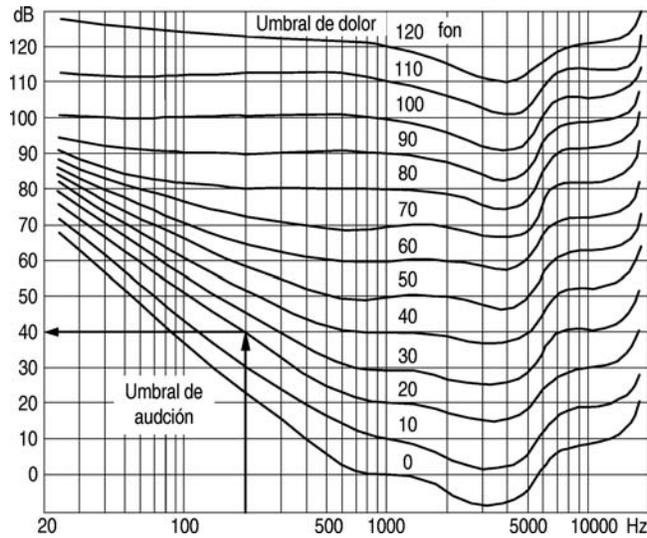


Figura 1. Curvas de Fletcher y Munson [6]. Un tono de 200 Hz y 40 dB de L_p provocará la misma sensación de sonoridad que uno de 1000 Hz y 20 dB de L_p . Se dice entonces que tiene un nivel de sonoridad de 20 fon . Obsérvese que a igual L_p los sonidos muy graves (baja frecuencia) y los muy agudos (alta frecuencia) tienen menor nivel de sonoridad que los sonidos medios. Además, en la zona de los 3000 Hz se tiene la mayor sensibilidad del oído. La curva de 0 fon es el umbral de audición, y la de 120 fon , el umbral de dolor.

$$\left(\frac{P_T}{P_{ref}}\right)^2 = \left(\frac{P_1}{P_{ref}}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{P_{ref}}\right)^2. \quad (6)$$

De la ecuación (2),

$$\left(\frac{P}{P_{ref}}\right)^2 = 10^{L_p/10}. \quad (7)$$

La expresión del nivel sonoro, L_p , resultante de la suma es:

$$L_p = 10 \log_{10} \left(10^{L_{p1}/10} + 10^{L_{p2}/10} \right). \quad (8)$$

En el caso de sumarse dos sonidos de diferentes niveles, el de menor nivel contribuye menos al de mayor nivel a medida que la diferencia entre ambos se amplía. Si la diferencia es de 10 dB , el sonido de menor nivel prácticamente no suma nada al de mayor amplitud.

La frecuencia de un sonido (en Hz) denota la cantidad de oscilaciones por segundo que ocurren en el aire en el cual el sonido se propaga. En los sonidos monofrecuentes, la frecuencia se asocia a la percepción del tono; sin embargo, la mayoría de los sonidos que se encuentran en la naturaleza y el medio ambiente son multifrecuentes, o sea, están conformados por una compleja suma de varias componentes de frecuencia. El rango de frecuencias audibles por el oído humano se extiende aproximadamente de 20 Hz a 20 kHz , para personas jóvenes sin problemas auditivos.

Para una evaluación más completa de un fenómeno sonoro, es necesario contemplar ambos aspectos: frecuencia y tiempo. El aspecto de la frecuencia puede ser toma-

do en cuenta intercalando diversos tipos de filtros entre la señal sonora detectada por el micrófono y el indicador final del instrumento de medición. Dichos filtros se clasifican en dos grandes clases: filtros de banda (de octava, de tercio de octava, de ancho de banda fijo) y las redes de ponderación (A, C, etc.). El aspecto temporal, por su parte, se tiene en cuenta por medio del tipo de respuesta temporal del instrumento: velocidad dinámica de respuesta (lenta, rápida, impulsiva) y la función promediadora (valor eficaz, pico, dosis, descriptores estadísticos). Esto se verá más adelante con mayor detalle.

La amplitud de una onda está relacionada con la sensación de sonoridad, o volumen del sonido correspondiente. Sin embargo, la relación no es tan directa como en el caso de la frecuencia, ya que la sensibilidad del oído varía notablemente con la frecuencia. Así, un sonido cuyo nivel de presión sonora es de 80 dB , por ejemplo, sonará bastante débil si su frecuencia es de 30 Hz y en cambio sumamente intenso si es de 3000 Hz .

Se han realizado experimentos para establecer de una manera cuantitativa esta peculiaridad de la respuesta auditiva. El resultado son las curvas obtenidas por los investigadores H. Fletcher y W. A. Munson [6]. Dichas curvas, ilustradas en la Figura 1 se obtuvieron comparando la sonoridad de un tono de frecuencia dada con la de un tono de 1 kHz al cual se le variaba el L_p . Estas curvas permitieron definir el nivel de sonoridad (NS) de un tono como el nivel de presión sonora de un tono de 1 kHz igualmente sonoro que el primero. Para diferenciar el nivel de sonoridad del nivel de presión sonora, se lo expresa en fon. En la Figura 1, se muestra el ejemplo de un tono de 200 Hz y 40 dB , el cual se escucha como uno de 1000 Hz y 20 dB , por lo cual el primero tiene $NS = 20 fon$. Las curvas extremas, son los límites de la audición humana. La correspondiente a 0 fon es el umbral de audición, por debajo del cual una vibración del aire no es perceptible. Debe aclararse que el umbral de audición depende realmente de la persona y del estado de su oído, correspondiendo las curvas a promedios estadísticos. La curva de 0 fon es el umbral para personas de buena audición. Una pérdida de 10 a 20 dB respecto a este umbral se considera normal. Por encima de los 25 dB de pérdida, comienzan las dificultades para la comprensión oral. La curva de 120 fon corresponde al umbral de dolor. De allí en adelante, además de sonido como tal comienza a percibirse un dolor intenso, además de empezar de inmediato el daño irreversible del oído interno.

Cada una de las curvas (o contornos) de Fletcher y Munson representa todas las combinaciones de frecuencia y nivel de presión sonora que suenan igual de intensas que un tono de referencia de 1000 Hz y nivel de presión sonora dado. Dicho nivel de presión sonora (en dB) es numéricamente igual al nivel de sonoridad (en fon) de todas esas combinaciones. Por dicha razón se suele denominar a estos contornos curvas de igual nivel de sonoridad. Lo anterior permite concluir que el oído es más sensible en la región central del espectro de frecuencias

(entre 500 Hz y 5000 Hz aproximadamente), ya que allí se requiere un menor nivel de presión sonora para evocar la misma sensación de sonoridad. Particularmente, la máxima sensibilidad se da cerca de los 3000 Hz , lo cual se explica porque en esa región el canal auditivo posee una resonancia acústica. También se observa que en bajas frecuencias la sensibilidad disminuye notablemente, es decir que allí se requiere una presión mucho mayor para lograr igual sensación de sonoridad. Desde el punto de vista del control de ruido, esta propiedad del oído es beneficiosa, ya que los ruidos de baja frecuencia son mucho más difíciles de aislar o absorber, y por lo tanto de controlar.

3.1. REDES DE PONDERACIÓN DE FRECUENCIA

La presión es medida por un micrófono calibrado y un amplificador, o por un sonómetro, que incorpora un filtro eléctrico capaz de modificar la respuesta en frecuencia, intentando seguir aproximadamente la respuesta subjetiva del oído humano. Este hecho, junto con la facilidad de realización física del filtro, ha conducido a la adopción de redes de ponderación en frecuencia, como medida normalizada en muchas normativas nacionales e internacionales. Las ponderaciones en frecuencia ampliamente aceptadas son :

- A. Es la red de ponderación más comúnmente utilizada para la valoración de daño auditivo e inteligibilidad de la palabra. Empleada inicialmente para analizar sonidos de baja intensidad, es hoy, prácticamente, la referencia que utilizan las leyes y reglamentos contra el ruido producido a cualquier nivel.
- B. Fue creada para modelar la respuesta del oído humano a intensidades medias. Sin embargo, en la actualidad es muy poco empleada. De hecho una gran cantidad de sonómetros ya no la contemplan.
- C. En sus orígenes se creó para modelar la respuesta del oído ante sonidos de gran intensidad. En la actualidad, ha ganado prominencia en la evaluación de ruidos en la comunidad, así como en la evaluación de sonidos de baja frecuencia en la banda de frecuencias audibles.
- D. Esta red de compensación tiene su utilidad en el análisis del ruido provocado por los aviones
- U. Es una red de ponderación de las más recientes. Se aplica para medir sonidos audibles en presencia de ultrasonidos.

3.2. REDES DE PONDERACIÓN TEMPORAL

En la definición del valor eficaz de la presión (2), interviene un tiempo de integración T de cuyo valor depende el resultado. En la figura 2 se muestra el valor eficaz de un pulso de 0,1s de duración, donde se puede apreciar esta dependencia.

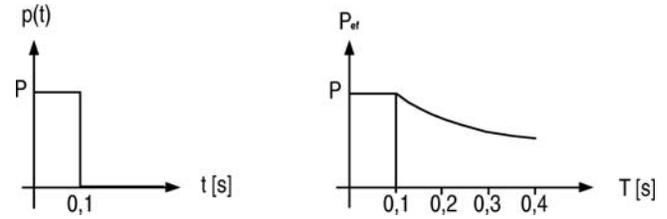


Figura 2. Un pulso de 0,1s de duración y su valor eficaz en función del tiempo de integración T .

En resumen, cuanto mayor sea el tiempo de integración, menos sensible es el valor eficaz a las fluctuaciones propias del ruido o sonido, transformándose en un parámetro global más que instantáneo del sonido. Esto lleva a considerar la necesidad de establecer al menos dos tipos de respuesta, en función del tipo de fenómeno que se quiera evidenciar con la medición. Surgen así las denominadas respuesta rápida y respuesta lenta, cuya caracterización precisa vemos a continuación. La obtención del valor eficaz en forma exacta se podría realizar con un dispositivo que realice la elevación al cuadrado y la integración, sin embargo, dado que es complicado realizar la integración en forma exacta, lo que se hace en la práctica es reemplazar dicha integración por un filtro de tipo “pasabajos”, que cumple una función similar comportándose como una especie de promediador “local”. El filtro pasabajos se caracteriza por una constante de tiempo τ que permite minimizar los errores.

- Se define la respuesta lenta (*slow*) como aquella para la cual ante una excitación en forma de pulso senoidal de 1 kHz y una duración de 0,5s, la indicación máxima obtenida está 4 dB por debajo de la que se obtendría para una señal senoidal de igual frecuencia y amplitud en régimen permanente. La constante de tiempo del filtro para la denominada respuesta lenta es de aproximadamente $\tau_{lento} = 1s$.
- La respuesta rápida (*fast*) se define como aquella para la cual ante una excitación en forma de pulso senoidal de 1 kHz y una duración de 0,2 s, la indicación máxima obtenida está 1 dB por debajo de la que se obtendría para una señal senoidal de igual frecuencia y amplitud en régimen permanente. En este caso se tiene una constante de tiempo aproximada de : $\tau_{rápido} = 0,125s$.
- La respuesta impulsiva es aquella para la cual la constante de tiempo para señales de valor absoluto creciente en el tiempo es de 35ms, y en cambio para señales de valor absoluto decreciente es de 1,5s, es decir :

$$\tau_{impulsiva\uparrow} = 35ms$$

$$\tau_{impulsiva\downarrow} = 1,5ms$$

La diferencia se debe a que de esta manera el instrumento es capaz de reaccionar ante pulsos muy rápidos,

como ruidos percusivos o de impacto, explosiones, etc., pero luego retiene el valor leído durante un tiempo razonable que permite su lectura por parte del operador.

4. EL NIVEL SONORO EQUIVALENTE (L_{eq})

Un concepto importante es el de nivel ruido equivalente aplicado a mediciones a lo largo de ciertos periodos de tiempo (no instantáneas). El nivel sonoro continuo equivalente con ponderación de frecuencia, $L_{eq}(A)$ o $L_{eq}(C)$, para un intervalo de tiempo especificado es el nivel de un ruido estable que corresponde al promedio (integral) en el tiempo de la presión sonora al cuadrado con ponderación de frecuencia producida por fuentes de sonidos estables, fluctuantes, intermitentes, irregulares o impulsivos en el mismo intervalo de tiempo (las letras mayúsculas A o C, se refieren al tipo de red de ponderación de frecuencia):

$$L_{eq} = 10 \log_{10} \frac{\frac{1}{T} \int_0^T p_A(t)^2 dt}{P_{ref}^2}, \quad (9)$$

donde $p_A(t)$ es la presión sonora ponderada por la red de compensación A, P_{ref} es la presión de referencia ($20\mu Pa$), y T el tiempo durante el cual se realiza el estudio, que puede ser la duración de una jornada de trabajo u otro tiempo cualquiera. El nivel sonoro continuo equivalente en un determinado punto de medición de un sonido que cambia con el tiempo es igual al nivel de un sonido estable equivalente para la misma duración de la medida; es decir, un sonido que tiene la misma energía sonora equivalente en una onda sonora libre progresiva que el sonido variable realmente medido. El nivel sonoro continuo equivalente es una cantidad que se mide directamente con un sonómetro integrador.

5. INDICADORES DE CONTAMINACIÓN ACÚSTICA

Por las características variables y complejas del ruido, es necesario recurrir a herramientas estadísticas para tratar los datos registrados. De manera más específica, se hace uso de los llamados descriptores estadísticos de ruido [7]. El análisis estadístico puede ser de dos tipos: distributivo y acumulativo. El primero indica por cuánto tiempo el nivel sonoro ha estado dentro de un intervalo dado, mientras que el segundo brinda indicación de por cuánto tiempo un determinado nivel sonoro ha sido superado. Este último tipo de análisis es el más utilizado, y en base al mismo se definen los descriptores estadísticos de ruido comúnmente conocidos como percentiles, los cuales sirven para dar información acerca de cómo varía o fluctúa el nivel sonoro durante el periodo de medición.

Un nivel percentil L_x representa el valor de nivel sonoro que fue superado durante el x porcentaje del tiempo de medición. Los percentiles L_{90} , L_{95} y L_{99} se suele utilizar para indicar lo que se conoce como *ruido de fondo*, ya que es el nivel de presión sonora mínimo o de base, que está presente casi todo el tiempo. Los percentiles L_1 , L_5 y L_{10} se suelen usar para indicar lo que se conoce como pico de ruido. Los percentiles son considerados más

representativos que los valores máximos y mínimos absolutos. En particular, a la diferencia ($L_{10} - L_{90}$) suele llamarse *clima de ruido*.

Entre los indicadores de niveles de contaminación, además de los percentiles, se tienen el nivel de contaminación de ruido (L_{np}) y el Índice de ruido de tráfico (TNI).

El L_{np} intenta explicar el aumento de la molestia debido a las fluctuaciones temporales del ruido y se define como:

$$L_{np} = L_{eq} + k\sigma \quad [dB], \quad (10)$$

donde σ es la desviación típica de los niveles sonoros instantáneos de los que se han tomado muestras durante el periodo de medición y k una constante de valor 2,56 obtenida por D.W. Robinson [5] después de varios estudios de respuesta subjetiva al ruido de tráfico y de aviones.

El TNI se utiliza frecuentemente para describir el ruido de la comunidad. Tiene en cuenta la variabilidad de los niveles sonoros observados, en un intento por mejorar la correlación entre las medidas de ruido de tráfico y la respuesta subjetiva frente al ruido. Se define por:

$$TNI = 4(L_{10} - L_{90}) + L_{90} - 30 \quad [dB]. \quad (11)$$

Tanto el TNI como el L_{np} tienen limitaciones aparentes o muestran inconsistencias cuando se aplican a tipos muy distintos de ruido de la comunidad.

6. DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO UTILIZADO PARA LAS MEDICIONES

Para la realización del presente trabajo, el Instituto de Investigaciones Físicas (UMSA) puso a nuestra disposición un sonómetro integrador CESVA, cuyas características técnicas se resumen en la Tabla 1.

El sonómetro cuenta con un calibrador proporcionado por el fabricante, cuyas especificaciones técnicas se detallan en la Tabla 2.

El micrófono del sonómetro ha sido sometido también a pruebas de respuesta en frecuencia y omnidireccionalidad, según el esquema descrito en la referencia [5], por lo que se han tomado las correspondientes previsiones a fin de eliminar los errores sistemáticos.

7. LINEAS METODOLÓGICAS DEL TRABAJO DE MEDICIÓN DE NIVELES DE RUIDO

En trabajos anteriores [5,7] se ha descrito el establecimiento de un protocolo de mediciones de ruido ambiental [5], con el objetivo de adoptar una metodología de evaluación del ruido urbano en la ciudad de La Paz y poder extenderlo al resto de ciudades del País; posibilitar una evaluación acertada de la exposición al ruido de los habitantes de una determinada región; determinar la necesidad de aplicar o extender políticas y plantear medidas tendientes al control del ruido urbano a mediano y largo plazo. De igual manera, se han sugerido diferentes líneas de acción para la elaboración de un mapa acústico de la ciudad de La Paz [7].

TABLA 1

Especificaciones técnicas del sonómetro integrador- promediador Cesva SC - 20c Tipo 1 utilizado para medir los niveles de contaminación acústica de la ciudad de La Paz.

Características	Sonómetro integrador - promediador
Marca	CESVA.
Modelo	SC - 20 c.
Rango dinámico	De 23 a 130 $dB(A)$ (RMS).
Rango pico	Hasta a 140 $dB(C)$.
Funciones	Fast (LF), Slow (LS), Pico (Lpk), nivel continuo equivalente (L_{eqT} , $L_{eq1'}$, $L_{eq1''}$), nivel de exposición sonora SEL (LE) y sus máximos. Medidas estadísticas, percentiles (L_{10} , L_{50} , L_{90}). Reloj (indica la duración de la medida).
Ponderación frecuencial	A y C para todas las funciones, excepto Lpk con sólo C.
Indicaciones	Saturación y batería agotada.
Memoria	1999 resultados finales o 199 minutos de grabación segundo a segundo (siempre guarda todos los parámetros).
Normas	IEC 60651:1979 (A1:1993), UNE-EN 60651:1996 (A1:1997), IEC 60804:1985 (A1:1989, A2:1993), UNE-EN 60804:1996 (A2:1997) en todas ellas como clase 1. B.O.E. núm. 311 del 29 Diciembre 1998 sobre metrología legal (aprobación de tipo n° 99006).
Certificados	Certificado de aprobación suizo (OFMET) n° S - 60 como clase 1.
Ruido de fondo	< 18 $dB(A)$ sin micrófono.
Salidas	Serie (RS-232) a 9.600 baudios para impresora y comunicación con PC . AC salida sin ponderación directa del preamplificador (max. 2,7 V RMS). DC salida equivalente al display (10 mV/dB).
Batería	1 batería tipo 6LF22 de 9 V, alcalina o de litio.
Dimensiones	260 × 82 × 19mm.
Peso	600gr con batería.

Por la importancia de la metodología contemplada en las referencias [5,7], y por ser el presente, un trabajo complementario a los mencionados, vemos por conveniente detallar nuevamente los diferentes pasos sistemáticamente utilizados en el proceso de recopilación, tratamiento e interpretación de datos de contaminación acústica en el centro de la ciudad de La Paz.

En primer lugar, siguiendo el protocolo de mediciones de ruido ambiental [5]:

- Para la valoración del ruido ambiental se siguen los

procedimientos y códigos de ensayo señalados por las normas ISO.

- Es recomendable medir de manera permanente. Sin embargo, más adelante veremos que para el caso de mapas acústicos, además por no contar con suficientes equipos de medida, el tiempo de medida se restringe a periodos apropiados.
- El equipo de medida acústica debe ser clasificado como tipo 1 necesariamente.

TABLA 2

Especificaciones técnicas del calibrador sonoro Cesva CB - 5 clase 1L.

Características	Calibrador acústico
Marca	CESVA.
Modelo	CB - 5.
Frecuencia	1 kHz ± 1,5 %.
Nivel de presión sonora	94 y 104 dB.
Distorsión armónica	< 1 %.
Variación a largo plazo	< 0,1 dB.
Normas	IEC 942:1988, UNE-EN 20942:1994 como clase 1L en ambas B.O.E. núm 311 del 29 diciembre 1998 sobre metrología legal (aprobación de tipo nº 99009).
Certificados	certificado de aprobación suizo (OFMET) nº S-60 como clase 1L.
Batería	1 batería tipo 6LF22 de 9V, alcalina o de litio.
Dimensiones	135mm, Ø48mm.
Peso	230gr con batería.

- Se debe calibrar adecuadamente el equipo de medida, considerando correcciones por variaciones de presión.
- Las medidas se deberán realizar a una altura entre 1,2m y 1,8m sobre el nivel del suelo, lo más cercano posible a la altura de los oídos de las personas. La distancia del micrófono a la superficie reflectora más próxima debe ser entre 1m y 2m.
- Para evaluar los niveles de contaminación de ruido ambiental se monitoreará con la red de ponderación de frecuencia A. Pudiéndose también usar la red de ponderación de frecuencia C si el ruido presenta fuertes componentes de baja frecuencia. Se recomienda la constante de tiempo de respuesta lenta (*slow*).
- Los parámetros para poder evaluar un estado de contaminación de ruido ambiental en una zona dada deben ser los siguientes: L_{eq} (Nivel sonoro continuo equivalente), percentiles L_{10} , L_{50} , L_{90} y los indicadores de contaminación L_{np} (Nivel de contaminación de ruido) y TNI (Índice de ruido de tráfico).

Para la aplicación de este protocolo a la elaboración de un mapa acústico de una ciudad o región, se han realizado algunas precisiones descritas en detalle en la referencia [7].

De manera resumida, algunos de los criterios generales considerados para la elección o descarte de puntos, son los siguientes:

- Distribución mas o menos uniforme de puntos en cada barrio

- Densidad de población
- Criterio de algunos habitantes consultados
- Cercanía a centros escolares u hospitales
- Agrupando varios puntos que presentan similitud en un único punto de medición representativo
- Combinación de uno o más de los criterios anteriores

Como método de validación de los parámetros adoptados, la diferencia entre los niveles de presión sonora en puntos adyacentes no debería ser superior a 5 dB.

Se realizó un trabajo de diagnóstico previo que permitió decidir también sobre los horarios en los cuales se deberían realizar las mediciones [7]. Considerando el mayor o menor flujo vehicular y la mayor o menor intensidad de actividad humana, se establecieron los siguientes 6 intervalos horarios para la toma de datos:

7:00 hrs - 9:00 hrs
10:00 hrs - 12:00 hrs
12:00 hrs - 14:00 hrs
16:00 hrs - 18:00 hrs
18:00 hrs - 20:00 hrs
22:00 hrs - 24:00 hrs

Para determinar qué tiempo de muestreo por cada intervalo era el que debía adoptarse como representativo del mismo, se realizó un estudio del tiempo de estabilización de los datos medidos, siguiendo el siguiente esquema simple. Con el criterio de que las medidas comienzan a estabilizarse si difieren apenas en (1 dB, se registran

TABLA 3

Información requerida en la hoja de datos generales.

INFORMACIÓN	DETALLE
Generales	Zona Calles Hora Nombre del archivo
Tipo de vía	N° de carriles Material del suelo Pendiente
Edificaciones	Altura estimada Promedio Material de construcción Vegetación cercana
Tráfico	Flujo vehicular Tipos de vehículos N° de vehículos

datos del nivel de ruido equivalente en forma completa minuto a minuto durante una hora. Con los datos registrados se calculan los niveles equivalentes para los primeros 59 minutos, luego para los primeros 58 minutos, y así sucesivamente hasta el primer minuto. Examinando los resultados se busca en qué minuto el nivel equivalente cumple con la condición de estabilización, siendo éste el número de minutos en la hora, necesarios para realizar las mediciones y que estas sean representativas de la hora entera. Este procedimiento se debe repetir varias veces para asegurar confiabilidad. Se observa, que en algunos puntos de la ciudad como la plaza Pérez Velasco, el tiempo de estabilización es mínimo y el nivel de ruido equivalente es prácticamente constante en todo el intervalo de medición. En otros puntos se requieren tiempos de medición mayores, lo que nos llevó a decidir normalizar todas las mediciones a un tiempo de 15 minutos por intervalo horario.

Para cada punto de medida se elaboraron dos hojas de reporte, una de datos generales y la otra de reporte de resultados. La hoja de reporte de datos generales, contiene la información detallada en la Tabla 3.

La información de la hoja de datos generales es muy importante al momento de abordar la elaboración de un mapa acústico. Permite, juntamente con los datos técnicos, desarrollar modelos que de manera complementaria enriquecen la información contenida en el mapa y permiten el desarrollo de modelos para extrapolar los resultados hacia lugares donde no se realizaron las mediciones. Lamentablemente este último aspecto no ha sido incorporado en el presente trabajo pues la extrema variabilidad de los datos en calles que no son troncales no permite adaptar un modelo estándar, sino por el contrario se requiere la concepción de un modelo más elaborado. En muchas calles y avenidas, no es posible encontrar

correlaciones entre los datos medidos y la información recopilada, siendo los mismos por el contrario, fuertemente aleatorios.

La hoja de reporte de resultados procesados de 10 columnas contiene la siguiente información: nombre del archivo donde esta almacenada la información original, identificación del punto de medida, la memoria en la que se grabaron los datos (Rcd), hora de inicio de las mediciones, desviación standard de la serie de medidas, los percentiles L_{10} - L_{50} - L_{90} , el nivel sonoro continuo equivalente L_{eq} , y los indicadores de contaminación L_{np} (Nivel de contaminación de ruido) y TNI (Índice de ruido de tráfico). De manera adicional se incluye en esta tabla la tasa horaria de flujo vehicular.

8. PUNTOS DE MEDIDA, DATOS, DIAGRAMAS Y MAPAS

Se han realizado mediciones de nivel sonoro en varios puntos del centro de la ciudad, elegidos siguiendo los criterios descritos en la sección anterior, por considerarlos importantes principalmente por la concentración permanente o circunstancial de personas en diferentes horas del día. En esta fase se cuentan con registros de 58 puntos que permiten una adecuada descripción del ambiente acústico de la ciudad de La Paz. Los puntos de medida están listados en la Tabla 4.

En las tablas incluidas en el apéndice se presentan ejemplos de los datos procesados para cuatro puntos de medida representativos. De igual manera las figuras del apéndice permiten observar histogramas comparativos entre los indicadores importantes para los diferentes intervalos horarios. Estos histogramas muestran relaciones importantes que las discutiremos en la siguiente sección.

Si bien existen muchas maneras de presentar un mapa acústico, la mayoría de ellas requieren necesariamente la utilización de un modelo computacional para extrapolar la información a puntos donde no se han realizado mediciones, lo cual no se ha alcanzado a realizar en el presente trabajo. Sin embargo, para fines de descripción del ambiente acústico del centro de la ciudad de La Paz, presentamos mapas acústicos parciales de los seis intervalos horarios considerados, complementados con criterios adicionales de tipo cualitativo antes que cuantitativo.

9. CONSIDERACIONES FINALES Y CONCLUSIONES

Se ha presentado una breve revisión de las características físicas del sonido, con énfasis en los aspectos relacionados con la cuantificación de ruido como un importante contaminante ambiental.

Se ha descrito nuevamente la técnica empleada para realizar mediciones de niveles de contaminación acústica en el centro de la ciudad de La Paz, siguiendo los trabajos de las referencias [5, 7].

Revisando la ley de medio ambiente [1], vemos que el Artículo 52 del Capítulo VI, Anexo 6, recomienda la necesidad del levantamiento de un mapa acústico de la ciudad de La Paz, para de manera objetiva y científica

TABLA 4

Lista de puntos de medida considerados en el trabajo.

Nº	PUNTO DE MEDIDA	Nº	PUNTO DE MEDIDA
1	Paseo del Prado (fuente)	30	Av. Pando Esq. Av. Montes
2	Esq. Cine 16 de Julio	31	Av. Perú esq. Independencia
3	Plaza del Estudiante	32	Terminal de Buses
4	Plaza Venezuela	33	Avenida Periférica Esq. C. Chacaltaya
5	Landaeta Esq. 20 de Octubre	34	Plaza Rene Barrientos
6	Plaza El Condor	35	Avenida Periferica cruce Vino Tinto
7	Landaeta Esq. Jaimes Freyre	36	Av. Sucre esq. C. Bolivar
8	Paseo Nuñez del Prado	37	Plaza Murillo
9	Plaza San Pedro	38	Mercado Yungas
10	Plaza Israel	39	Av. Camacho esq. Bueno
11	Almirante Grau Esq. Zoilo Flores	40	Av. Simón Bolívar – entrada Kusillo
12	Zoilo Flores esq. Riobamba	41	Plaza Stadium
13	Plaza Marcelo Quiroga Santa Cruz	42	Hospital Obrero
14	Plaza Líbano	43	Plaza Triangular
15	Av. Avaroa esq R. Bustamante	44	Av. Saavedra – Facultad de Medicina
16	Sagárnaga Esq. Max Paredes	45	Plaza Villarroel
17	Sagárnaga Esq. Murillo	46	C. Haití esq. Av. Iturralde
18	C. Santa Cruz Esq. Figueroa	47	Plaza España Esq. Ecuador
19	Figueroa Esq. America	48	Plaza Adela Zamudio
20	Tumusla Esq. Illampu	49	Plaza Andrew Esq. Jaimes Freyre
21	Puerta del cementerio	50	Plaza Lira Esq. General Lanza
22	Parada micro 42 – detrás del cementerio	51	C. Rosendo Gutierrez esq. C. Bustillos
23	Calle E. Avaroa esq. M. Cossio	52	C. Chaco esq. C. Reseguin
24	Plaza Garita de Lima	53	Jaimes Freyre Esq. Jaime Zudañes
25	Buenos Aires Esq. Tumusla	54	Av. 20 de Octubre Esq. Aspiazu
26	Plaza Kennedy (Av. America)	55	Av. 20 de Octubre Esq. Belisario Salinas
27	Plaza Pérez Velasco	56	Final 6 de agosto y Avenida Arce
28	Av. Montes – puente autopista	57	Plaza Isabel la Católica
29	Av. Montes – TAM	58	Final Sánchez Lima – inicio Av. Kantutani

plantear las regulaciones y ordenanzas municipales sobre emisiones acústicas y la clasificación de las zonas urbanas acorde a la sensibilidad acústica. La ley señalada indica que el máximo permisible de emisión de ruido en fuentes fijas es de $68 \text{ dB}(A)$ de las seis a las veintidós horas y de $65 \text{ dB}(A)$ de las veintidós a las seis horas. Las fuentes fijas que se localicen en áreas cercanas a centros hospitalarios, guarderías, escuelas, asilos y otros lugares de descanso no deben rebasar el límite máximo permisible de emisión de ruidos de $55 \text{ dB}(A)$. El gobierno municipal de la ciudad de La Paz, mediante ordenanza municipal GMLP No. 233/2002, ha hecho público el REGLAMENTO DE PREVENCIÓN Y CONTROL DE LA CONTAMINACIÓN ACÚSTICA [2], que maneja los mismos parámetros que la ley de medio ambiente aunque es un poco más explícito en la explicación de los mismos.

El presente trabajo de recolección de datos de ma-

nera sistemática tendiente a la elaboración de un mapa acústico de la ciudad de La Paz, además de continuar con las mediciones, debe ser complementado con modelos computacionales que permitan cuantificar los niveles de contaminación acústica en calles y avenidas donde no se haya realizado medidas de niveles de ruido. El trabajo podrá servir de base para dar respuesta a los objetivos señalados en la ley del medio ambiente. Resulta claro concluir que la ley no es adecuada o nadie la respeta.

Se han tomado en cuenta mediciones realizadas en 58 puntos del centro paceño. Para efectos de elaboración del mapa acústico, se ha considerado, el nivel sonoro equivalente, L_{eq} , y para la presentación e interpretación de resultados, se han considerado también los percentiles L10 y L90 además de los indicadores de contaminación acústica L_{np} y TNI . Se ha trabajado sobre seis intervalos horarios diferenciados: 7-9, 10-12, 12-14, 16-18, 18-20



Figura 3. Mapa acústico parcial del centro de la ciudad de La Paz en el intervalo horario de 7:00 a 9:00.

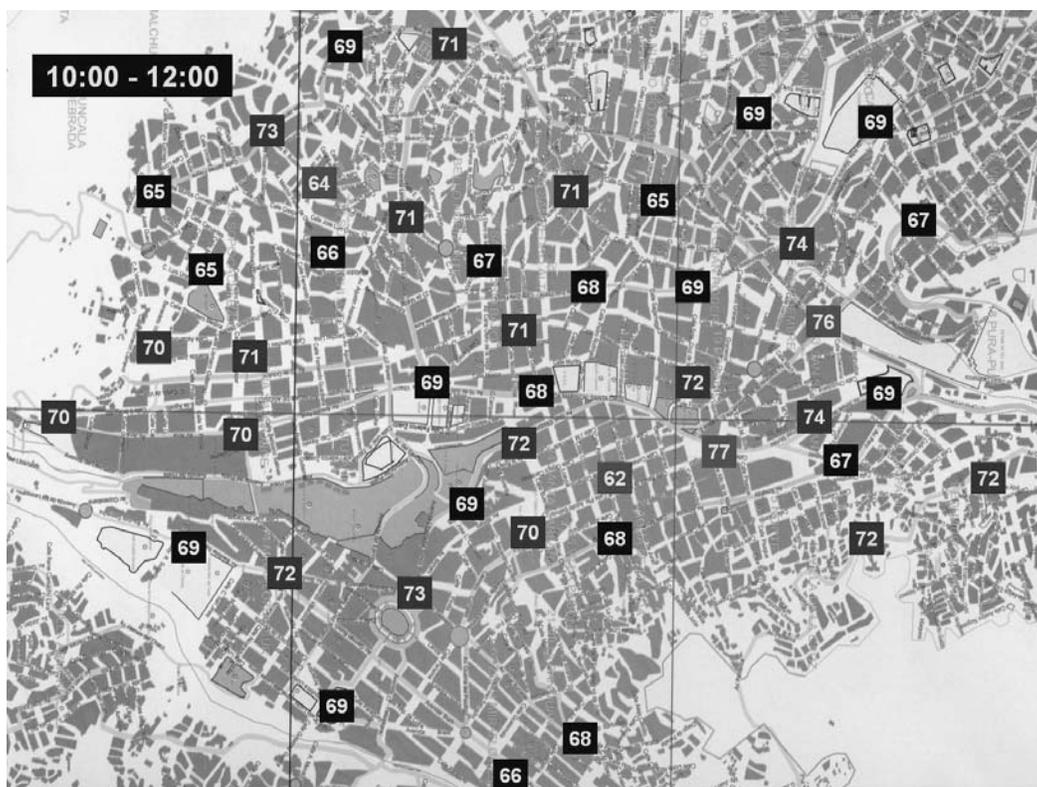


Figura 4. Mapa acústico parcial del centro de la ciudad de La Paz en el intervalo horario de 10:00 a 12:00.

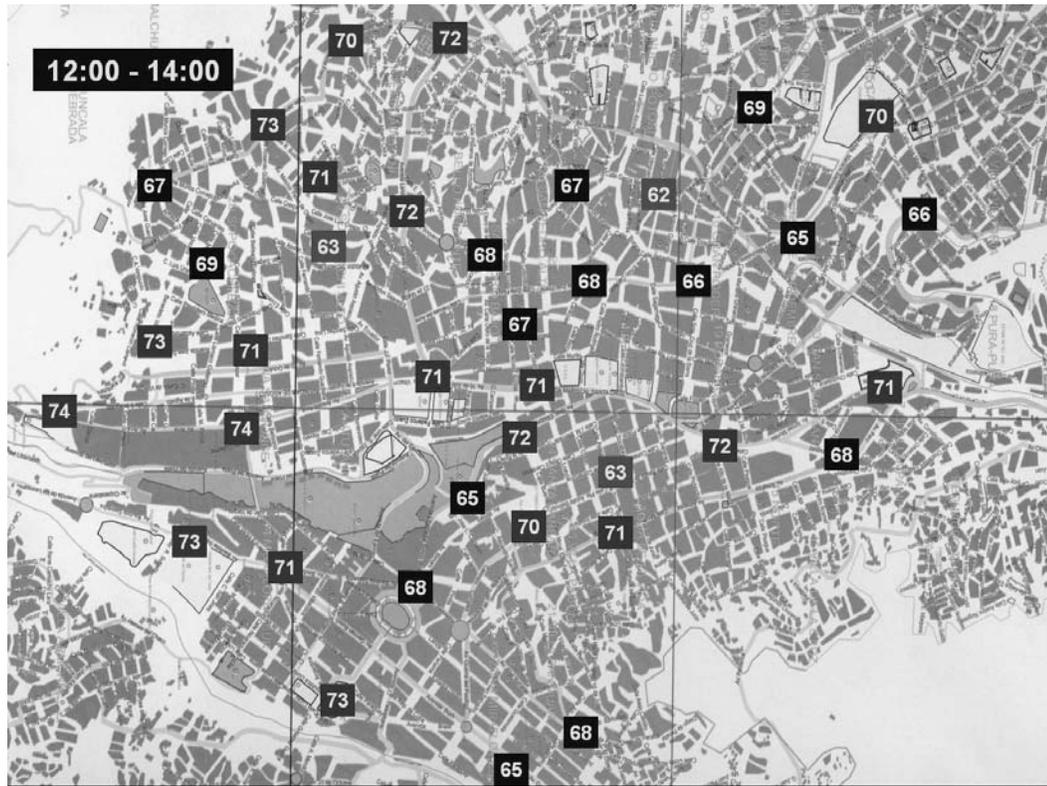


Figura 5. Mapa acústico parcial del centro de la ciudad de La Paz en el intervalo horario de 12:00 a 14:00.



Figura 6. Mapa acústico parcial del centro de la ciudad de La Paz en el intervalo horario de 16:00 a 18:00.

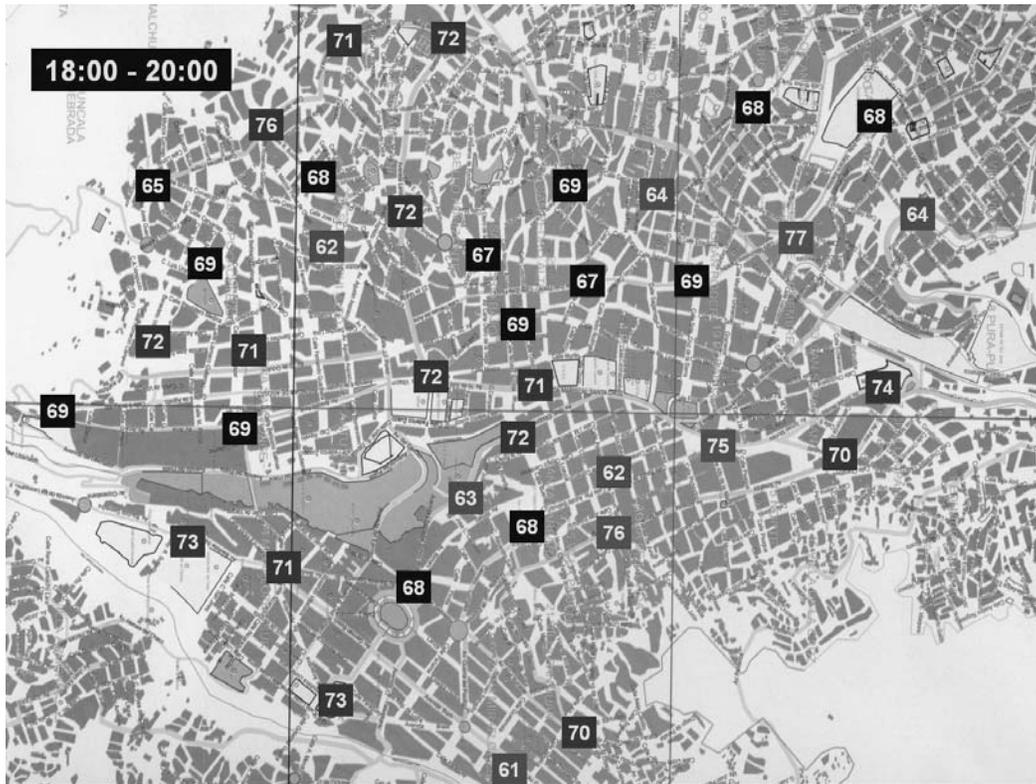


Figura 7. Mapa acústico parcial del centro de la ciudad de La Paz en el intervalo horario de 18:00 a 20:00.

y 22-24, lo que permite un óptimo conocimiento del ambiente acústico en el centro de La Paz.

Las mediciones han sido realizadas en días laborables (lunes a viernes), llegándose a comprobar previamente, que el ambiente acústico es prácticamente equivalente en cualquiera de estos días. Con seguridad que no es lo mismo en los días sábado y domingo. Consideramos, aunque de manera *ad-hoc*, que todas las semanas a lo largo del año son equivalentes. Es necesario realizar un estudio detallado para determinar las variaciones estacionales.

Se ha escogido el tiempo de muestreo de 15 minutos en cada intervalo en base a pruebas de estabilidad de los datos realizadas en diferentes lugares. En general, del análisis de los datos, de los histogramas comparativos y de los mapas acústicos se puede deducir lo siguiente:

- No existe una variación significativa de los datos en los diferentes intervalos horarios. Esto permite concluir que el ambiente acústico en el centro de la ciudad es similar a lo largo de todo el día.
- Las medidas tomadas en horario nocturno presentan gran variabilidad por lo que en principio no se puede sacar las mismas conclusiones que para el horario diurno.
- Los promedios de nivel sonoro equivalente están casi siempre por encima de los que indica la norma a cualquier hora del día. Principalmente en el eje norte sur que va desde la terminal, bajando por la avenida Montes, Av. Mariscal Santa Cruz, El Prado, Av.

Arce hasta San Jorge. En un 80% de los casos, los niveles superan los 70 $dB(A)$ permanentemente.

- Los valores mínimos del nivel sonoro equivalente registrados son:

VALORES MÍNIMOS DE L_{eq} EN LOS DIFERENTES INTERVALOS

7:00 hrs - 9:00 hrs	59 dB
10:00 hrs - 12:00 hrs	62 dB
12:00 hrs - 14:00 hrs	62 dB
16:00 hrs - 18:00 hrs	61 dB
18:00 hrs - 20:00 hrs	61 dB

- Los valores máximos del nivel sonoro equivalente registrados son:

VALORES MÁXIMOS DE L_{eq} EN LOS DIFERENTES INTERVALOS

7:00 hrs - 9:00 hrs	80 dB
10:00 hrs - 12:00 hrs	77 dB
12:00 hrs - 14:00 hrs	74 dB
16:00 hrs - 18:00 hrs	80 dB
18:00 hrs - 20:00 hrs	77 dB

- De la observación de los percentiles L90 se puede concluir que existe un ruido de fondo sumamente elevado, por encima de los 60 $dB(A)$, lo que

- está en relación directa con la tasa horaria de flujo de vehículos que como puede verse es muy alta y casi permanente en las horas del día.
- La situación en áreas donde existen hospitales y escuelas, es similar a la de cualquier calle. No se cumple la reglamentación en absoluto.
 - Más allá de la medida de la variable física nivel sonoro, tenemos la sensación subjetiva de molestia por las variaciones en los valores medidos, por lo que su incidencia en la salud es importante. El indicador L_{np} permite concluir que se producen fuertes molestias relacionadas con las variaciones en los niveles de ruido. Los valores de este indicador varían mucho debido a lo dispersos que son los datos.
 - El indicador TNI muestra como principal agente contaminante al tráfico vehicular. Los valores calculados son sumamente elevados aún en zonas cercanas a escuelas y hospitales.
 - No se observa una relación directa entre el flujo de automóviles y los indicadores L_{eq} , L_{np} y TNI . Por lo tanto se concluye que deben tomarse en cuenta otros parámetros adicionales como el tipo de edificaciones, el material de la calle, la pendiente, el tipo de moviidades, la velocidad con la que transitan por el punto, etc, para considerarlo en la construcción del mapa acústico.
 - Existen efectos anómalos que alteran el registro de los datos, los cuales no han sido procesados en el presente trabajo por falta de registros precisos.
 - Algunas personas consultadas de manera casual en las cercanías de los puntos de medición, perciben que realmente existe un ruido fuerte.
 - Las personas mas afectadas son aquellas que realizan sus actividades de manera cotidiana en las calles del centro paceño.
 - La situación podría ser algo diferente en las laderas y la zona sur de la ciudad, aunque en el diagnóstico previo concluimos que existe muchísima variación de una calle a otra, aún cuando están muy próximas la una de la otra.
 - La recolección sistemática de datos y su tratamiento estadístico apropiado permitirá la elaboración de modelos que tengan un grado de predictibilidad de los niveles de contaminación acústica en relación a cambios en los centros urbanos, como ser apertura de vías, construcción de edificaciones, levantamiento de urbanizaciones, construcción de hospitales y escuelas, etc.
- El presente es un trabajo parcial que debe ser complementado con muchas más mediciones, y adicionalmente, con la elaboración de modelos de mapas acústicos en cada zona o barrio.

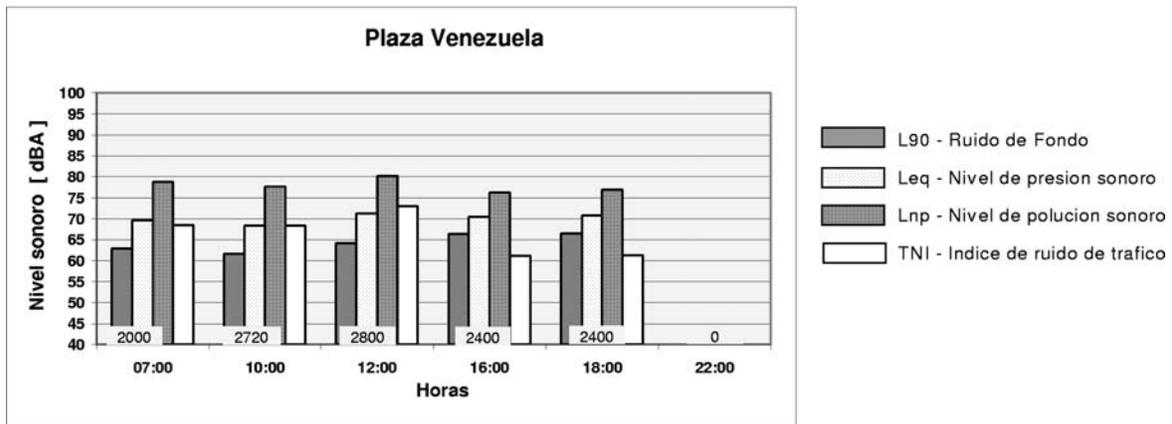
REFERENCIAS

- [1] LEY DE MEDIO AMBIENTE (Ley N° 1333 de 27 de abril de 1992) Y REGLAMENTO DE MEDIO AMBIENTE (Decreto Supremo N° 24176 de 8 de diciembre de 1995), U.P.S. Editorial.
- [2] REGLAMENTO DE PREVENCIÓN Y CONTROL DE LA CONTAMINACIÓN ACÚSTICA, Ordenanza Municipal GMLP No. 233/2002.
- [3] World Health Organization, Guidelines for Community Noise, edited by Birgitta Berglund, Thomas Lindvall, Dietrich H. Schwela, (1999).
- [4] M. Arana y J.M. Asiain, "Elaboración de mapas acústicos mediante técnicas computacionales", Departamento de Física, Universidad de Navarra, España (2001).
- [5] S. F. Barreta, "Protocolo Para Medidas de Ruido Ambiental en la Ciudad de La Paz", Tesis de Licenciatura, Carrera de Física, UMSA (2003).
- [6] Alberto Behar, "El ruido y su control", Ed. Trillas.
- [7] W. Tavera, S. F. Barreta, E. Franck, "Resultados preliminares de mediciones de ruido urbano en la Ciudad de La Paz: Bases para la elaboración de un mapa acústico", Artículo-informe, Resumen de labores 2003, IIF-Carrera de Física, UMSA (2003).

ANEXO 1

Archivo :	DATOS	Punto de medida :	Plaza Venezuela
-----------	-------	-------------------	-----------------

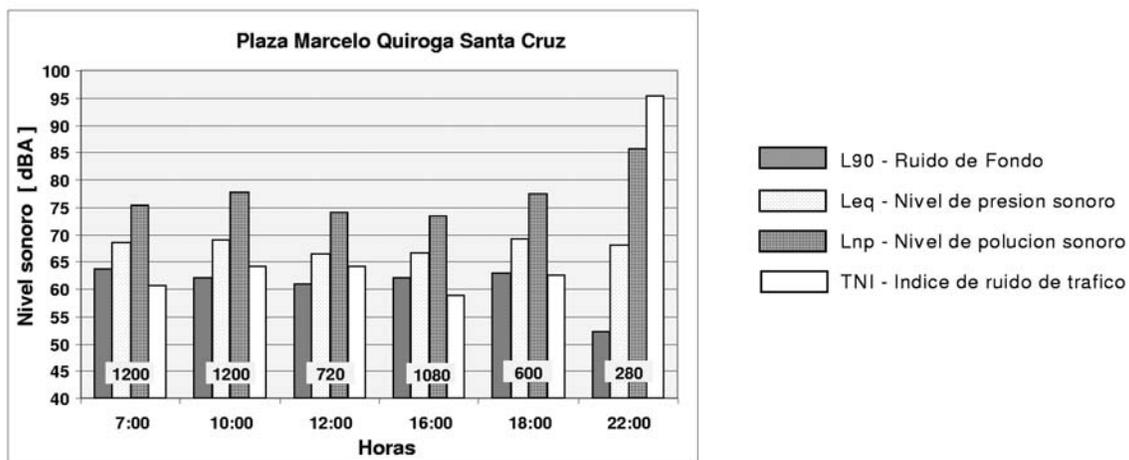
Rcd	Hora	σ	L 10	L 50	L 90	Leq	Lnp	TNI	Nro. autos
8 (10mayo)	7:00	3,57	71,8	67,5	62,9	69,7	78,8	68,5	2000
12 (10mayo)	10:00	3,64	70,8	66,5	61,6	68,4	77,7	68,4	2720
18 (10mayo)	12:00	3,51	74,0	69,4	64,3	71,2	80,2	73,1	2800
2 (27mayo)	16:00	2,29	72,6	69,2	66,4	70,4	76,3	61,2	2400
6 (27mayo)	18:00	2,42	72,7	69,3	66,5	70,8	77,0	61,3	2400



ANEXO 2

Archivo :		Punto de medida :	Plaza. Marcelo Quiroga Santa Cruz
-----------	--	-------------------	-----------------------------------

Rcd	Hora	σ	L 10	L 50	L 90	Leq	Lnp	TNI	Nro. autos
1 (m 2)	7:00	2,73	70,4	66,5	63,6	68,4	75,4	60,8	1200
11 (m 1)	10:00	3,47	70,1	65,0	62,1	68,9	77,8	64,1	1200
9 (m 2)	12:00	2,96	69,2	64,2	60,9	66,5	74,1	64,1	720
8 (m 1)	16:00	2,65	68,7	64,8	62,0	66,6	73,4	58,8	1080
3 (m 1)	18:00	3,22	70,3	65,9	62,9	69,3	77,5	62,5	600
11	22:00	6,89	70,5	61,6	52,2	68,1	85,7	95,4	280



**XVII REUNIÓN NACIONAL DE LA SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA,
DEL 27 AL 29 DE OCTUBRE DE 2005,
COCHABAMBA-BOLIVIA**

Sociedad Boliviana de Física

La Paz—Bolivia

RESUMEN

Se presenta la lista de las exposiciones de la XVII Reunión Nacional de Física a realizarse en Cochabamba entre el 27 y el 29 de Octubre de 2005.

1. LA DIALÉCTICA DE LA COMPLEJIDAD EN EL OBJETO DE LA FÍSICA

Dr. Carlos Álvarez

2. CONTAMINACIÓN ACÚSTICA

Lic. Saúl F. Barreta P.

Resumen

Se presentarán los nuevos trabajos en contaminación acústica y principalmente las líneas de trabajo para formar un grupo de acústica a nivel nacional, junto a las Universidades de La Paz (U.M.S.A.), Potosí (UATF), y Cochabamba (UMSS).

3. IMPACTO DE EL NIÑO EN EL MONZÓN SUDAMERICANO: UN ESTUDIO DE DIAGNÓSTICO ESTACIONAL PARA LOS EPISODIOS 86/87 Y 91/92

M.Sc. Andrés Burgoa

Resumen

Se efectuará el análisis de las anomalías en la circulación atmosférica en los niveles bajos y altos durante los episodios de El Niño 86/87 y 91/92.

4. OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Lic. Roy Bustos

Resumen

Olimpiada Boliviana de Física desde 1997 a 2005.

5. CORRELACIÓN DE LA DOSIS SOLAR UV-A CON LA VARIACIÓN DE COLOR DE CINTAS

Lic. Freddy Flores Flores

Resumen

Mediante el Centro de Aguas y Saneamiento Ambiental (C.A.S.A.) de la UMSS y la fundación Sodis

se cuenta con cintas (N° 1, 2, 9) en forma de plásticos que cambian de color cuando sobre éstas incide radiación electromagnética de distintas intensidades.

El objetivo principal de este trabajo de investigación es correlacionar la dosis solar UV-A con la variación de color de cintas para su aplicación en el método de desinfección del agua a través de radiación solar.

Las cintas cambian de color cuando reciben distintas cantidades de dosis, unas cambian más rápidamente que otras. Se elaboró una tabla de colores con las respectivas dosis a las que adquieren dichos colores. Los datos de radiación solar UV-A y global fueron obtenidos con un radiómetro del C.A.S.A.

Se ha realizado un estudio óptico de las cintas para determinar sus propiedades ópticas como ser su transmitancia, absorbancia, etc.. Esto con un espectrofotómetro con el que cuenta el centro de aguas.

6. UNA APLICACIÓN INTERESANTE DE MÉTODOS BAYESIANOS MARKOV CHAIN MONTE-CARLO

Dr. Kjetil Halvorsen

7. OBSERVATORIO GEOMAGNÉTICO DE VILLA REMEDIOS

Lic. Pedro Miranda Loza

Resumen

Es necesario dar a conocer los objetivos de la existencia de un observatorio geomagnético en el altiplano boliviano y mostrar los resultados preliminares de dos gestiones así como las ampliaciones que se tendrán en el futuro.

8. GLACIARES

Lic. Hans Muller

9. SINCRONIZACIÓN DE OSCILADORES FOTO-CONTROLADOS LOCALMENTE ACOPLADOS

Dr. Marcelo Ramírez Ávila

Resumen

Se estudian osciladores fotocontrolados (LCDS) acoplados en configuración lineal y bajo condiciones de borde periódicas y no periódicas.

Se consideran dos criterios de sincronización, uno basado en la diferencia de fases y otro en el período del sistema de osciladores.

Finalmente, se investiga la situación en la que los osciladores se asemejan a osciladores de integración y disparo.

10. EVIDENCIAS DEL EFECTO INVERNADERO EN BOLIVIA

Dr. Eduardo Palenque

Resumen

Se muestra una serie de parámetros climáticos y meteorológicos que evidencian los cambios debido al calentamiento global y el efecto invernadero.

Se presentan datos de temperaturas, presión atmosférica, precipitación, radiación solar, etc., de diversas fuentes.

Se concluye que los efectos del calentamiento global en Bolivia son no sólo mensurables sino además muy claros, teniendo así evidencia experimental.

11. ANÁLISIS DEL TSUNAMI DE INDONESIA

Dr. Eduardo Palenque

Resumen

Se presentan análisis de los registros locales (del Observatorio Sísmico "San Calixto"), comparados con registros de otras estaciones.

También se muestra el proceso de detección y la determinación de la ubicación e intensidad de los signos y la onda atmosférica subsónica asociada.

12. EMISIÓN GALÁCTICA EN 30GHz Y 41,5GHz

M.Sc. Mirko Raljevic Erqueta

Resumen

La emisión galáctica en microondas es importante para el estudio de los componentes que contaminan la señal de la radiación cósmica de fondo. Usando un método de correlación cruzada determinamos la contribución galáctica en mapas de RCF en 30GHz y 41,5GHz.

Estudiamos también el exceso de emisión correlacionado con emisión de polvo.

Comparamos los índices espectrados con los modelos de emisión galáctica aceptados.

13. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Dr. Rosendo Ochoa

14. VARIACIONES DEL CAMPO MAGNÉTICO PRINCIPAL

B.Sc. Edgar Ricaldi Yarvi

Resumen

Revisados aproximadamente 30 observatorios localizados en diferentes puntos sobre la superficie de la tierra, se observa un decrecimiento del valor del campo magnético principal en la mayor parte de la superficie de la tierra, un crecimiento en algunas regiones, y una deriva general hacia el oeste del campo magnético.

Los datos son elegidos con criterios que definen su correspondencia con datos de origen interno.

15. FENÓMENOS NO LINEALES EN INSTRUMENTOS MUSICALES

Est. Sachiko Leticia Sakuma Calatayud

Resumen

Si bien el estudio lineal de la emisión de sonidos de los instrumentos musicales pudo resolver muchos problemas tales como la relación de las notas y sus armónicos, se necesita un estudio no lineal para poder explicar otro tipo de fenómenos, en especial, para comprender los sonidos que busca la música contemporánea y los que son propios de las regiones del Asia o de América.

Recientes investigaciones han detectado caos en instrumentos de percusión tales como el gong, los platillos y el Tam-Tam Chino. Dependiendo del grosor, la textura, la curvatura de las membranas y la manera de tocar los instrumentos, se pueden obtener efectos sonoros muy maravillosos.

En cuanto a los instrumentos de viento se trata, por la forma de su tubo, el modo de soplarlos y en general de todo su mecanismo, son material muy propicio para el estudio de la acústica no lineal, por ejemplo: El Didjerido australiano, la flauta del teatro, noh japonés y la Tarka, aerófono andino de características muy peculiares.

16. EL MISTERIO DEL TIEMPO

Dr. Santiago Sologuren

17. LEVEL DENSITY AND LEVEL WIDTH FOR ^{28}Si , ^{46}Ti , ^{52}Cr AND ^{60}Ni , FROM ERICSSON FLUCTUATIONS

Dr. Américo F. Salas Bacci

Resumen

Se mide la sección eficaz diferencial para reacciones compuestas en $^{27}\text{Al}(p, n_0)^{27}\text{Si}$, $^{45}\text{Sc}(p, n_0)^{45}\text{Ti}$, $^{51}\text{V}(p, n_0)^{51}\text{Cr}$ y $^{59}\text{Co}(p, n_0)^{59}\text{Ni}$ y se extraen los niveles de densidad para los núcleos ^{28}Si , ^{46}Ti , ^{52}Cr y ^{60}Ni , mediante las fluctuaciones de Ericsson.

18. EINSTEIN; ASCENSO Y ESPLENDOR: SUS TRABAJOS DE 1905 Y EL ECLIPSE DE 1919

Dr. Diego Sanjinés C.

Resumen

En homenaje al "Annus Mirabilis" de Einstein, se presenta una descripción breve sobre los artículos que publicó Einstein en 1905, así como las consecuencias más relevantes de su teoría especial de la relatividad, lo que llevó a la elaboración de la teoría general de la relatividad y su espectacular confirmación experimental en ocasión del eclipse de 1919.

19. ESTUDIO DEL PÉNDULO IMPULSADO EN EL PUNTO CRÍTICO

Dr. Armando Reynaldo Ticona Bustillos

Resumen

El péndulo impulsado presenta, en su diagrama de fases, una transición de regular a caótico.

En este punto crítico el comportamiento del sistema obedece a la estadística de Tsallis.

Se estudia el sistema y se determina el valor del exponente "q" en este punto crítico.

20. POSIBLES CONSTELACIONES EN LA PUERTA DEL SOL

Lic. Deterlino Urzagasti

Resumen

Se estudia la posibilidad de que una o más agrupaciones de estrellas brillantes hayan sido representadas en el friso de la Puerta del Sol en Tiwanaku.

21. MOVIMIENTO BROWNIANO

Lic. Miguel Yucra Equice

22. MEDIDAS DE ALBEDO EN EL SALAR DE UYUNI

Dr. Francesco Zaratti S.

Resumen

En mayo de 2005 el LFA-UMSA, juntamente al Instituto de Meteorología de la Universidad de Munich, realizó una campaña de mediciones de la RUV en el Salar de Uyuni.

En esta conferencia se presentan los resultados preliminares correspondientes a medidas de albedo en el Salar y al efecto del contrario en las medidas de albedo.

Asimismo se comentan algunos efectos físicos y climáticos relacionados con el albedo.

10^{MA} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, EXAMEN NACIONAL

Bustos R.¹, Condori V.H.¹, Gutierrez V. H.², Gutierrez E.², Guaygua T.³, Jemio C.³,
Mamani N.³, Portugal R.⁴, Huallpa, D.⁵, Huallpa R.⁵, Mamani R.⁵, Velarde A.⁶, Saldaña J.⁷,
Yucra E.⁷, Callejas W.⁹, Coraite O.¹⁰, Quiroz Z.¹¹, Ramírez M.¹²

¹ Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz

² Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH) Facultad de
Tecnología — Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre

³ Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro

⁴ Universidad Mayor de San Simón, Facultad de Ciencia y Tecnología, Cochabamba

⁵ Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), Carrera de Física, Potosí

⁶ Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

⁷ Colegio Cristo Rey, Santa Cruz

⁸ Colegio Miguel Graun, El Alto

⁹ Instituto Americano, Pando

¹⁰ Colegio La Salle, Oruro

¹¹ Instituto Americano, La Paz

¹² Colegio San Agustín, Cochabamba

RESUMEN

Se presentan las soluciones de los exámenes tomados en la 10^{ma} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA (10^{ma} OBF) de los cuatro cursos participantes: 1^{ro}, 2^{do}, 3^{ro} y 4^{to} de Secundaria. El evento se llevó a cabo los días 17, 18 y 19 de Junio de 2005 en los predios de la Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH), Facultad de Tecnología, Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre.

La Página Internet del proyecto es: <http://www.fiumsa.edu.bo/olimpiada/>



Examen de 1° de Secundaria

1°: PARTE CONCEPTUAL

1. Para qué usamos el análisis dimensional en la Física y cómo simbolizamos para significar que estamos realizando el análisis dimensional a una cantidad Física
2. En un cambio de fase como ser de sólido a líquido o de líquido a gas, explique que sucede con la temperatura.
3. ¿Qué es la Física, que estudia y cual es su clasificación?

1°: PARTE PRÁCTICA

1. Cuanto vale la magnitud del vector resultante, si los vectores están sobrepuestos en un hexágono regular de lado L tal como se ve en la *figura 1°.1.1*?

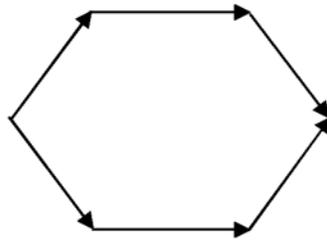


figura 1°.1.1

2. Un alambre circular rodea totalmente un disco de 50 cm de radio. Si existe un incremento de 100 °C en la temperatura del sistema, ¿Qué separación existirá entre el alambre y la moneda?
Datos: $\alpha_{\text{alambre}}=3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_{\text{moneda}}=10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
3. Al determinar el tiempo que tarda un móvil en pasar por dos puntos OP, dos cronómetros A y B, realizan las lecturas visibles en la *Tabla 1°.3.1*:

Cronómetro A	Cronómetro B
2.04 s	2.05 s
2.07 s	2.03 s
2.05 s	2.06 s
2.08 s	2.04 s
2.09 s	2.05 s
2.10 s	2.04 s
2.05 s	2.05 S

Tabla 1°.3.1

- ¿Cuál de estos dos instrumentos viene a ser el más exacto en comparación con un tercer instrumento considerado como el más perfecto y que registra una lectura del tiempo de paso del móvil entre los puntos OP de 2.056 segundos?
4. Las dimensiones de una piscina son 10.376 m por 525 cm. y 8.2 ft de alto ¿Cuál es la cantidad de agua que se requiere para llenar dicha piscina y qué tiempo en horas se requiere para este efecto si la provisión de agua por tubería es de 15 litros por cada 20 segundos?.
(Ayuda: 1 ft = 30.48 cm)

Examen de 1° de Secundaria

1°: SOLUCION PARTE CONCEPTUAL

1. El análisis dimensional se emplea en Física para determinar que una magnitud física se encuentra en las unidades correspondientes. Ejemplo:

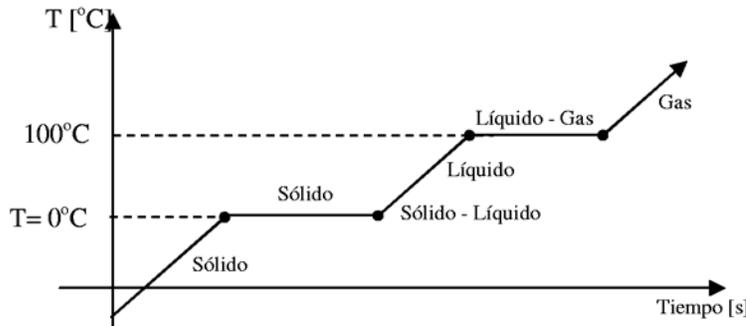
DIMENSIONES	SIMBOLOS
LONGITUD	L
MASA	M
TIEMPO	T

Tabla 1°.1.1

$$F = m \cdot a \left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$F = \left[M \frac{L}{T^2} = M \cdot L \cdot T^{-2} \right]$$

- 2.



Sólido < 0°C
 Sólido-Líquido = 0°C = Constante
 Líquido > 0°C

figura 1°.2.1

Según el gráfico de la figura 1°.2.1, en los cambios de fase (sólido – líquido, líquido – gas) hay un lapso de tiempo en el que la temperatura debe ser

3. La Física es una ciencia que estudia los fenómenos naturales, la interacción y propiedades de la materia sin alterar la estructura íntima de la misma, así como las leyes que rigen esas interacciones.

1°: SOLUCION PARTE PRÁCTICA

- 1.

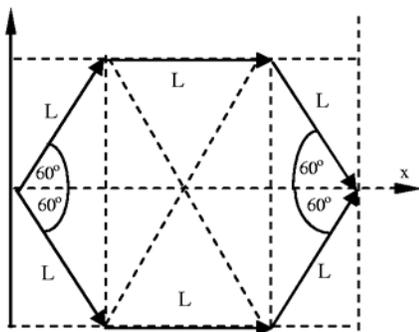


figura 1°.1.2

Hexágono < 60°

Por simetría :

$$\sum F_x = 2 \cdot L \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot L + 2 \cdot L \cdot \cos 60^\circ$$

$$\sum F_x = 2 \cdot L \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot L + 2 \cdot L \cdot \frac{1}{2} = 4L$$

$$\sum F_x = 4L$$

$$\sum F_y = 2 \cdot L \cdot \text{sen} 60^\circ - 2 \cdot L \cdot \text{sen} 60^\circ = 0$$

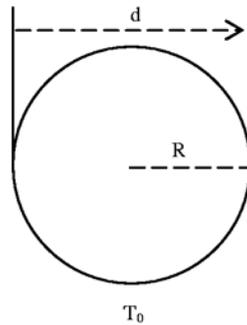
$$\sum F_y = 0$$

Por lo tanto la resultante será igual a:

$$R = 4L$$

2.

figura 1°.2.2



Datos:

$$R = 50 \text{ cm}$$

$$\Delta T = 100^\circ\text{C}$$

$$e = ?$$

$$\alpha_{\text{alambre}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_{\text{moneda}} = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Para la moneda a la temperatura inicial T_0 :

$$d_0 = 2 R$$

La variación del diámetro Δd en función de la variación de la temperatura ΔT , sigue la relación:

$$\Delta d = d_0 \alpha_{\text{moneda}} \Delta T$$

$$\Delta d = 2 R \alpha_{\text{moneda}} \Delta T$$

$$\Delta d = 100 \text{ cm } 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} 100^\circ\text{C}$$

$$\Delta d = 10^{-1} \text{ cm}$$

Ahora:

$$\Delta d = d - d_0$$

Entonces:

$$d = \Delta d + d_0$$

$$d = 10^{-1} \text{ cm} + 100 \text{ cm}$$

$$d = 100.1 \text{ cm}$$

Para el alambre, el perímetro inicial viene dado por:

$$L_0 = 2 \pi R = 314.16 \text{ cm}$$

Del mismo modo, la variación de este perímetro ΔL en función de la variación de la temperatura ΔT , sigue la relación:

$$\Delta L = L_0 \alpha_{\text{alambre}} \Delta T$$

$$\Delta L = 314.16 \text{ cm } 3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} 100^\circ\text{C}$$

$$\Delta L = 0.942 \text{ cm}$$

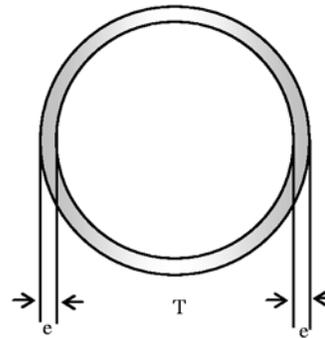


figura 1°.2.3

Ahora:

$$\Delta L = L - L_0$$

Entonces:

$$L = \Delta L + L_0$$

$$L = 0.942 \text{ cm} + 314.16 \text{ cm}$$

$$L = 315.10 \text{ cm}$$

Luego, el diámetro final D , del alambre, será:

$$D_{\text{alambre}} = \frac{L}{\pi} = 100.3 \text{ cm}$$

Finalmente, el espacio e viene dado por:

$$e = \frac{D - d}{2} = 0.1 \text{ cm}$$

3. El valor más exacto (V. M. E.) viene dado como dato inicial y corresponde a: $x' = 2.056$ s.

Para el cronómetro A, el valor más probable (V. M. P.) resulta de la relación:

$$\bar{x}_A = \frac{\sum \text{datos}}{n(\text{número de datos})}, \quad \text{entonces: } \bar{x}_A = 2.069 \text{ s. Su error absoluto es: } \epsilon_A = |\bar{x}_A - x'|$$

$$\epsilon_A = 0.013 \text{ s}$$

De igual forma, para el cronómetro B, se puede calcular su valor más probable (V. M. P.):

$$\bar{x}_B = \frac{\sum \text{datos}}{n(\text{número de datos})}, \quad \text{entonces: } \bar{x}_B = 2.046 \text{ s. Su error absoluto es: } \epsilon_B = |\bar{x}_B - x'|$$

$$\epsilon_B = 0.01 \text{ s}$$

Como el error absoluto del cronómetro B resultó menor en relación al error absoluto del cronómetro A, entonces es el cronómetro B el más exacto.

4. Luego de transformar las tres medidas de la piscina a metros tenemos (figura 1°.4.1):

Datos:

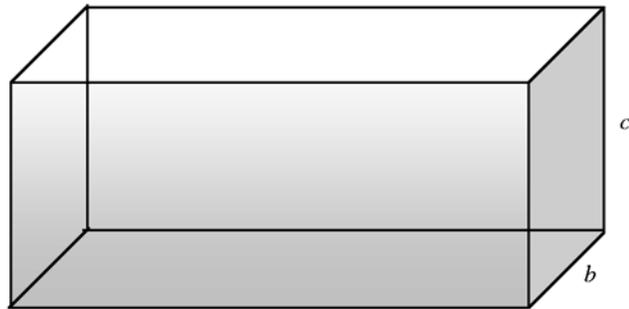
$$a = 10.376 \text{ m}$$

$$b = 5.25 \text{ m}$$

$$c = 2.5 \text{ m}$$

$$\Phi \text{ (Flujo de agua)} = 15 \text{ lt}/20\text{s}$$

$$\Phi = 0.75 \text{ lt/s (litros/segundo)}$$



a

figura 1°.4.1

El volumen de la piscina es:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 136.185 \text{ m}^3$$

$$V = 136.185 \cancel{\text{m}^3} \times \frac{10^6 \cancel{\text{cm}^3}}{1 \cancel{\text{m}^3}} \times \frac{1 \text{ lt}}{10^3 \cancel{\text{cm}^3}} = 136185 \text{ litros}$$

De manera que el tiempo en horas para que se llegue a llenar la piscina será:

$$t = V \cdot \Phi^{-1} = 136185 \cancel{\text{lt}} \times \frac{1 \cancel{\text{s}}}{0.75 \cancel{\text{lt}}} \times \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \cancel{\text{s}}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \cancel{\text{min}}} = 50.44 \text{ horas}$$

Examen de 2° de Secundaria

2°: PARTE CONCEPTUAL

1. Se ponen en contacto dos espejos, M_1 y M_2 a un ángulo de 120° como se ve en la *Figura 2°.1.1*. Un rayo incide a 50° con la normal a M_1 . ¿En que dirección abandonará M_2 la luz con respecto a su normal?

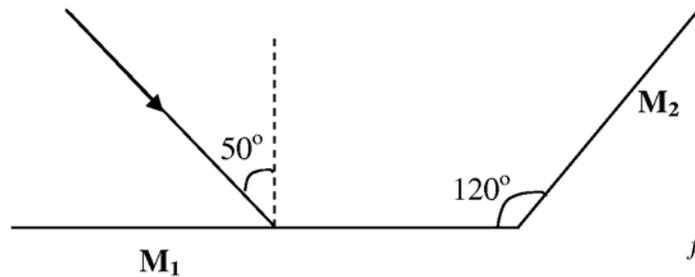


figura 2°.1.1

2. ¿Cuál es la dirección del movimiento que tienen las partículas del medio, en el que se propaga una onda viajera longitudinal?
3. En un cambio de fase como ser: de sólido a líquido o de líquido a gas, explique que sucede con la temperatura.

2°: PARTE PRÁCTICA

1. Dos lentes convergentes, de longitudes focales 10.0 cm. y 20.0 cm., están separadas 20.0 cm., como se muestra en la *figura 2°.1.2*. Se sitúa un objeto a 15.0 cm. a la izquierda de la primera lente. Calcular la posición (respecto a la segunda lente) y la amplificación de la imagen final gráfica y analíticamente. Realice el esquema respectivo.

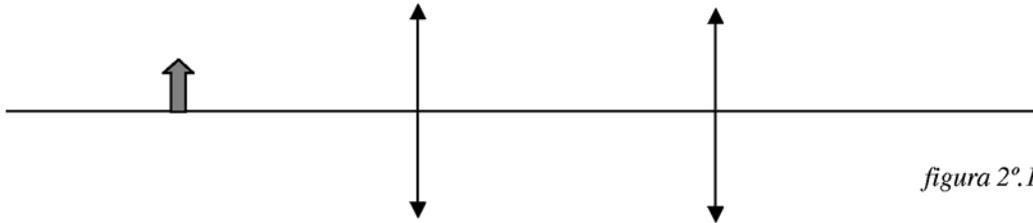


figura 2°.1.2

2. En el centro de una piscina de 6 m de radio se produce una perturbación que origina un movimiento ondulatorio en la superficie del agua, la longitud de onda vale $\frac{3}{4}$ m y tarda 12 s en llegar a la orilla; calcular: a) el periodo y la frecuencia del movimiento; b) la amplitud, si al cabo de $\frac{1}{4}$ de segundo la elongación es de 4 cm; c) la elongación de un punto situado a 6 cm del foco emisor en el instante $t=12$ s.
3. Las dimensiones de una piscina son 10.376 m por 525 cm. y 8.2 ft de alto. ¿Cuál es la cantidad de agua que se requiere para llenar dicha piscina y qué tiempo en horas se requiere para este efecto si la provisión de agua por tubería es de 15 litros por cada 20 segundos?. (1ft = 30.48 cm)
4. Cuanto vale la magnitud de vector resultante, si los vectores están sobrepuestos en un hexágono regular de lado L tal como se ve en la *figura 2°.4.1*?

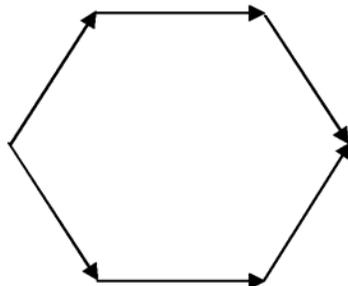
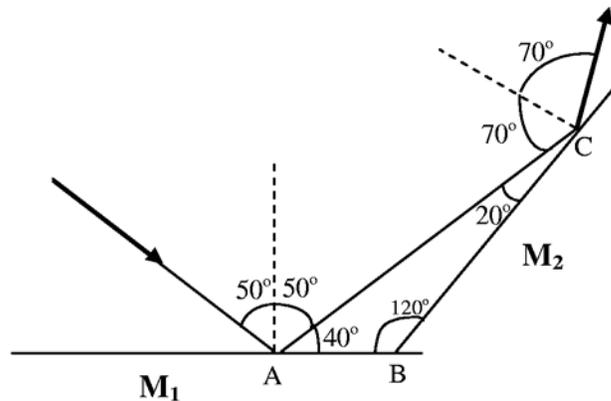


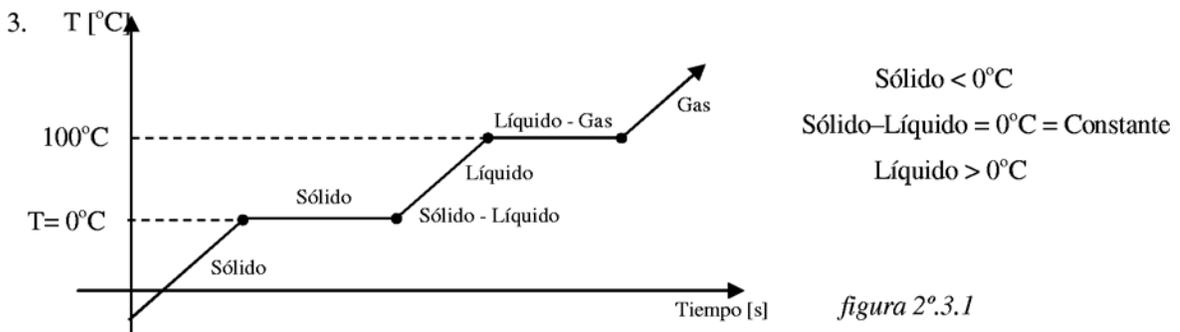
figura 2°.4.1

Examen de 2° de Secundaria**2°: SOLUCION PARTE CONCEPTUAL**

1. De acuerdo con la ley de reflexión, el ángulo de reflexión en M1 es también 50° con respecto a la normal a M1. Por simple geometría, el ángulo que forma el rayo reflejado con el mismo espejo M1 es 40° . Luego, en el triángulo ABC formado por el rayo reflejado en M1 e incidente en M2 se tiene que, el ángulo en C es igual a $180^\circ - 40^\circ - 120^\circ = 20^\circ$. Ahora, el ángulo de incidencia en el espejo M2, con respecto a su normal, viene a ser 70° y el ángulo de reflexión también será 70° , lo que determinará la dirección del haz de luz incidente en M2, como lo muestra la *figura 2°.1.3*

*figura 2°.1.3*

2. Un clásico ejemplo de una onda longitudinal es aquella que viaja a través de un resorte; por lo tanto, la dirección del movimiento que tienen las partículas del medio, en este caso un resorte, es la misma que la onda viajera.



Según el gráfico de la *figura 2°.3.1*, en los cambios de fase (sólido - líquido, líquido - gas) hay un lapso de tiempo en el que la temperatura debe ser constante.

2°: SOLUCION PARTE PRÁCTICA

1.

Hacemos el cálculo de la posición de la imagen para la primera lente ignorando a la segunda, para lo cual empleamos la fórmula de lentes delgadas:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \rightarrow \frac{1}{15} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10}$$

Como $p_1=15.0$ cm., $f_1=10.0$ cm. Tendremos que la distancia de la imagen $q_1=30.0$ cm.

Ahora, la imagen de la segunda lente se considera como objeto virtual para la segunda lente por lo que debemos considerar negativa es decir: $p_2=-10$ cm., entonces, la distancia de la imagen final para la segunda lente será:

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \rightarrow \frac{1}{-10.0} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{20.0}$$

De donde obtenemos que la imagen final esta a $q_2=6.67$ cm. a la derecha de la segunda lente. El aumento de cada lente se calcula mediante las relaciones:

$$M_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{30.0}{15.0} = -2.0$$

$$M_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{6.7}{-10.0} = 0.67 = -0.7$$

Finalmente, la amplificación total de las dos lentes será el producto de cada una de ellas, es decir:

$$M = M_1 M_2 = -2.00 * 0.67 = -1.33$$

Este resultado nos indica que la imagen final es real, invertida y más grande que el objeto.

2. Datos:

$R=6m$
 $\lambda=0.75m$
 $T=12s$

Se pide:

a) $T=?$
 $f=?$

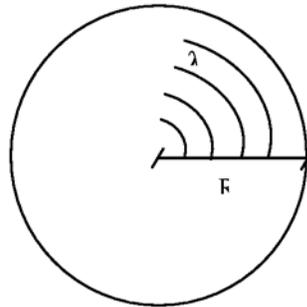


Figura 2°.2.1

a) El número n de oscilaciones hasta llegar a la orilla es:

$$n = \frac{R}{\lambda} = 8$$

El periodo T y la frecuencia f son:

$$T = \frac{t}{n} = 1.5s$$

$$f = \frac{1}{T} = 0.66Hz$$

b) $A = ?$
 $x =$
 $t = 0.25s$

b) Partiendo de la ecuación de una onda como función de dos variables:

$$x = A \cdot \cos \omega \cdot t$$

$A =$ amplitud de la onda, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = frecuencia angular, $t =$ tiempo.

$$x = A \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$x = A \cdot \cos 60^\circ$$

$$A = \frac{x}{\cos 60^\circ} = \frac{4cm}{\frac{1}{2}}$$

$$A = 8cm$$

c) $x = ?$
 $d = 6 \text{ cm}$
 $t_T = 12 \text{ s}$

c) El tiempo t' que la onda tarda en recorrer 6cm es igual a:

$$t' = \frac{d}{v} = \frac{0.06cm}{0.5m/s} = 0.12s$$

Ahora, el tiempo t que oscila un punto a 6cm del foco emisor será:

$$t = t_{TOTAL} - t' = 12s - 0.12s = 11.88s$$

Entonces, la elongación para este tiempo es:

$$x = A \cdot \cos \omega \cdot t = A \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$x = 8cm \cdot \cos 331.2^\circ$$

$$x = 7.01cm$$

3.

Luego de transformar las tres medidas de la piscina a metros tenemos (figura 2°.3.1):

Datos:

$$a = 10.376 \text{ m}$$

$$b = 5.25 \text{ m}$$

$$c = 2.5 \text{ m}$$

(Flujo de agua) = 15 lt/20s

$$\Phi = 0.75 \text{ lt/s (litros/segundo)}$$

El volumen de la piscina es:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 136.185 \text{ m}^3$$

$$V = 136.185 \cancel{\text{m}^3} \times \frac{10^6 \cancel{\text{cm}^3}}{1 \cancel{\text{m}^3}} \times \frac{1 \text{ lt}}{10^3 \cancel{\text{cm}^3}} = 136185 \text{ litros}$$



figura 2°.3.1

De manera que el tiempo en horas para que se llegue a llenar la piscina será:

$$t = V \cdot \Phi^{-1} = 136185 \cancel{\text{lt}} \times \frac{1 \cancel{\text{s}}}{0.75 \cancel{\text{lt}}} \times \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \cancel{\text{s}}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \cancel{\text{min}}} = 50.44 \text{ horas}$$

4.

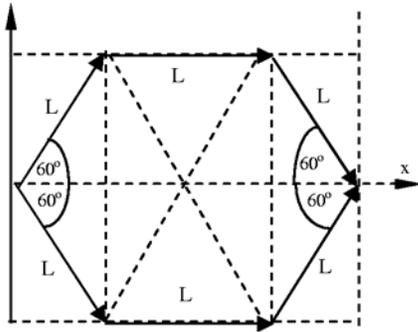


figura 2°.4.1

Hexágono $\sphericalangle 60^\circ$

Por simetría :

$$\sum F_x = 2 \cdot L \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot L + 2 \cdot L \cdot \cos 60^\circ$$

$$\sum F_x = 2 \cdot L \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot L + 2 \cdot L \cdot \frac{1}{2} = 4L$$

$$\sum F_x = 4L$$

$$\sum F_y = 2 \cdot L \cdot \text{sen} 60^\circ - 2 \cdot L \cdot \text{sen} 60^\circ = 0$$

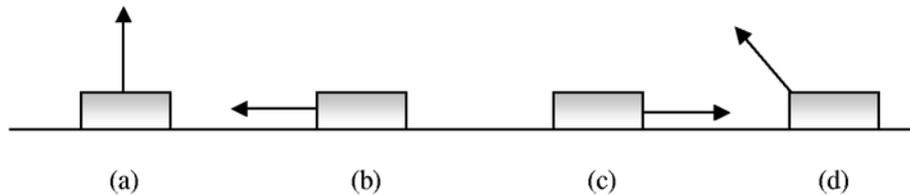
$$\sum F_y = 0$$

Por lo tanto la resultante será igual a:

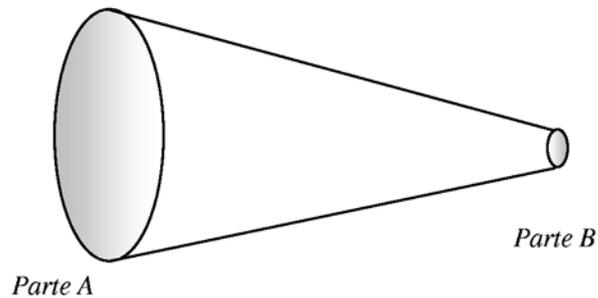
$$R = 4L$$

Examen de 3° de Secundaria**3°: PARTE CONCEPTUAL**

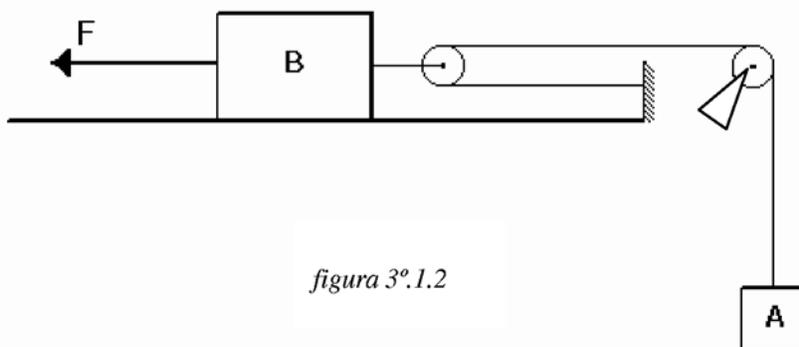
1. En un planeta, el valor g de su gravedad es la mitad del valor de la gravedad en la Tierra. ¿Cuanto tiempo necesita un objeto para caer al suelo desde una altura h partiendo del reposo, en relación al tiempo requerido para un objeto en la Tierra en las mismas condiciones?
2. La *figura 3°.1.1* muestra cuatro situaciones en las que se aplica una fuerza a un objeto. En los cuatro casos, la fuerza y el desplazamiento del objeto tienen la misma magnitud, el objeto se desplaza hacia la derecha. Clasifique las situaciones según el trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto, de más positivo a más negativo.

*figura 3°.1.1*

3. El agua fluye a través de un tubo de sección variable. Si el flujo es laminar y el diámetro de la *parte A* es mayor que el diámetro de la *parte B* (*figura 3°.3.1*). Indique la relación entre las partes A y B de la presión y la velocidad.

*figura 3°.3.1***3°: PARTE PRÁCTICA**

1. Cuales son las aceleraciones de los cuerpos A y B del sistema que se muestra en la *figura 3°.1.2*, el rozamiento entre el cuerpo B y la superficie horizontal es nulo y el peso de la cuerda y las poleas son despreciables.

*figura 3°.1.2*

2. Un objeto flota en agua con 20% de su volumen sobre el nivel de la superficie del agua. ¿Cuál es la densidad media del objeto? (Ayuda: La densidad del agua vale 1000 Kg/m^3).
3. Dos partículas se mueven en un campo de gravedad homogéneo con una aceleración igual a g . En el momento inicial ambas se encontraban en un mismo punto y sus velocidades dirigidas horizontalmente y en sentidos opuestos eran $v_1 = 3 \text{ m/s}$ y $v_2 = 4 \text{ m/s}$. Hallar la distancia entre las partículas en el momento en que los vectores de sus velocidades resultan ser mutuamente perpendiculares.
4. En el centro de una piscina de 6 m de radio se produce una perturbación que origina un movimiento ondulatorio en la superficie del agua, la longitud de onda vale $\frac{3}{4} \text{ m}$ y tarda 12 s en llegar a la orilla; calcular: a) el periodo y la frecuencia del movimiento; b) la amplitud, si al cabo de $\frac{1}{4}$ de segundo la elongación es de 4 cm; c) la elongación de un punto situado a 6 cm del foco emisor en el instante $t=12 \text{ s}$.

Examen de 3° de Secundaria

3°: SOLUCION PARTE CONCEPTUAL

1. Según las ecuaciones de caída libre de los cuerpos, se establece que la altura " H_{TIERRA} " desde la que cualquier cuerpo cae en la Tierra es igual a:

$$H_{\text{Tierra}} = \frac{1}{2} g (t_{\text{Tierra}})^2 \quad (1)$$

Siendo g la aceleración de la gravedad en la Tierra y t_{Tierra} el tiempo de caída de los cuerpos. Para el caso del planeta en cuestión y dado que su gravedad es la mitad que el valor de g , la ecuación debe ser similar:

$$H_{\text{Planeta}} = \frac{1}{4} g (t_{\text{Planeta}})^2 \quad (2)$$

Tomando en cuenta que la altura debe ser la misma al igual que las condiciones del experimento, igualamos las ecuaciones (1) y (2) para obtener:

$$\frac{1}{2} g (t_{\text{Tierra}})^2 = \frac{1}{4} g (t_{\text{Planeta}})^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} t_{\text{Tierra}} = \frac{1}{2} t_{\text{Planeta}}$$

$$\frac{t_{\text{Planeta}}}{t_{\text{Tierra}}} = \sqrt{2}$$

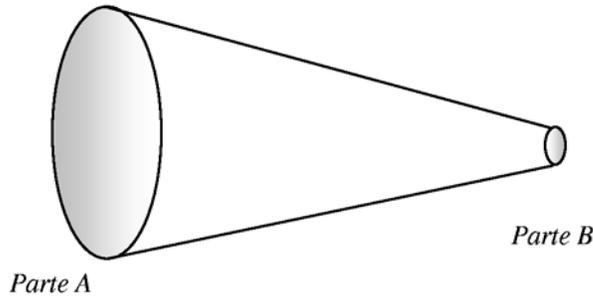
Por lo tanto, la relación entre los tiempos de caída de los cuerpos tanto en la Tierra como en el mencionado Planeta será:

$$t_{\text{Planeta}} = \sqrt{2} \cdot t_{\text{Tierra}}$$

Es decir, que en el Planeta los cuerpos caerán más lentamente que en la Tierra, esto debido a que la aceleración de la gravedad en el mismo es menor que en la Tierra.

2. Como el objeto se del gráfico se está desplazando a la derecha y considerando como positivo este sentido, el caso (C) sería el más positivo por la adición vectorial, luego estaría (A) por no influir bastante en la suma vectorial, pues la fuerza aplicada no tiene componente en el eje del desplazamiento. Luego estaría el caso (D) por influir sus componentes respectivas, y por último como el mayor influyente sería el caso (B), pues es la mayor contra fuerza

3.



Dado que: Área_A > Área_B se tiene:

Velocidad_(A) < Velocidad_(B)

Presión_(A) > Presión_(B)

3º: SOLUCION PARTE PRACTICA

1.

CASO A: Cuando el cuerpo A acelera verticalmente hacia abajo.

Para el cuerpo A:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= m_A a_A \\ w_A - T &= m_A a_A \quad (1) \\ T &= m_A g - m_A a_A \quad (1_a)\end{aligned}$$

Para el cuerpo B:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m_B a_B \\ 2T - F &= m_B a_B \\ \text{Re mplantando (1}_a\text{) en (2):} \\ 2m_A g - 2m_A a_A - F &= m_B a_B\end{aligned}$$

Como la aceleración $a_A = 2a_B$ (3), reemplazando (3) en (2_a)

$$2m_A g - 2m_A a_A - F = m_B \frac{a_A}{2}$$

$$4m_A g - 4m_A a_A - 2F = m_B a_A$$

$$a_A = \frac{4m_A g - 2F}{4m_A + m_B}$$

$$a_B = \frac{2m_A g - F}{4m_A + m_B}$$

CASO B: Cuando el cuerpo A acelera verticalmente hacia arriba:

Para el cuerpo A:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= m_A a_A \\ T - m_A g &= m_A a_A \\ T &= m_A g + m_A a_A \quad (1)\end{aligned}$$

Para el cuerpo B:

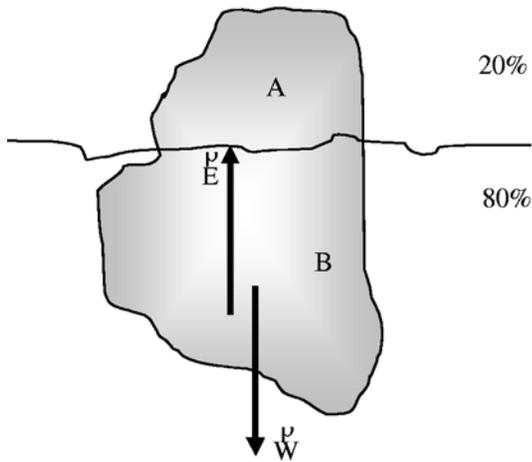
$$\begin{aligned}\sum F_x &= m_B a_B \\ F - 2T &= m_B a_B \quad (2) \\ \text{Re mplantando (1) en (2):} \\ F - 2m_A g - 2m_A a_A &= m_B a_B \\ F - 2m_A g - 2m_A a_A &= m_B \frac{a_A}{2} \\ 2F - 4m_A g - 4m_A a_A &= m_B a_B\end{aligned}$$

En este caso las aceleraciones son:

$$a_A = \frac{2F - 4m_A g}{4m_A + m_B}$$

$$a_B = \frac{F - 2m_A g}{4m_A + m_B}$$

2.



Debido al equilibrio y por el principio de Arquímedes:

$$E = W \quad (1)$$

E = empuje = peso del volumen desplazado por el cuerpo = $M g$

W = peso del cuerpo = $m g$

Como la densidad de un cuerpo es igual a:

$$\rho = \text{masa} / \text{volumen}$$

La masa de un cuerpo puede expresarse en función de su densidad y volumen, en (1) se tiene:

$$Mg = mg$$

$$\rho_{\text{aguadesplazada}} \cdot 0.8 \cdot V \cdot g = \rho_{\text{cuerpo}} \cdot V \cdot g$$

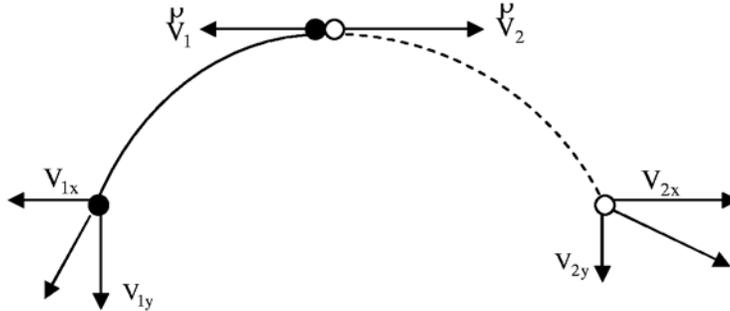
$$\rho_{\text{cuerpo}} = 0.8 \cdot \rho_{\text{aguadesplazada}}$$

Por tanto, como la densidad del agua vale 1000 kg/m^3 , la densidad media del cuerpo es:

$$\rho_{\text{cuerpo}} = 0.8 \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

3.

Por las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado tenemos:



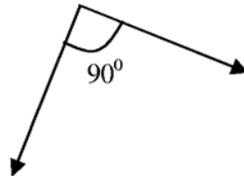
$$v_{1x} = -3 \frac{m}{s} \cos 0^\circ$$

$$v_{1y} = -3 \frac{m}{s} \sin 0^\circ - gt$$

$$v_{2x} = 4 \frac{m}{s} \cos 0^\circ$$

$$v_{2y} = 4 \frac{m}{s} \sin 0^\circ - gt$$

Cuando los vectores velocidad sean mutuamente perpendiculares:



$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} \cdot \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = -1$$

$$\frac{-gt}{-3m/sg} \cdot \frac{-gt}{4m/sg} = -1$$

$$x_1 = -3m/sg \cos 0^\circ \times 0.35sg = -1.05m$$

$$y_1 = -3m/sg \sin 0^\circ \times 0.35sg - \frac{1}{2} 9.8m/sg^2 (0.35sg)^2 = -0.6m$$

$$g^2 t^2 = 12m^2 / sg^2$$

$$t = \frac{\sqrt{12m^2 / sg^2}}{\sqrt{(9.8m/sg^2)^2}} = 0.35sg$$

$$x_2 = 4m/sg \cos 0^\circ \times 0.35sg = 1.4m$$

$$y_2 = 4m/sg \sin 0^\circ \times 0.35sg - \frac{1}{2} 9.8m/sg^2 (0.35sg)^2 = -0.6m$$

Finalmente, la distancia buscada viene dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1.4 + 1.05)^2} = 2.45m$$

4. Ver Solución de la pregunta 2. de la parte Practica del examen de 2° de Secundaria.

Examen de 4° de Secundaria**4°: PARTE CONCEPTUAL**

1. Tenemos a un capacitor de placas paralelas cuadradas de áreas A y separación d , en el vacío. ¿Cuál es el efecto cualitativo de cada uno de los casos siguientes sobre su capacitancia?. (a) Si d se reduce. (b) Si se coloca una lámina de cobre entre las placas, pero sin que toque a ninguna de ellas. (c) Si se duplica el área de ambas placas paralelas. (d) Si se duplica el área de una placa solamente. (e) Si se desliza a las placas paralelamente entre sí de modo que el área de traslape sea del 50%. (f) Si se duplica la diferencia de potencial entre las placas.
2. Tres pelotas idénticas se lanzan desde la cornisa de un edificio, todas ellas con la misma rapidez inicial. La primera pelota es lanzada en forma horizontal, la segunda formando un cierto ángulo por encima de la horizontal y la tercera formando un cierto ángulo por debajo de la horizontal. Ignorando la resistencia del aire, clasifique de mayor a menor las tres pelotas según las magnitudes de la velocidad que tengan al llegar al suelo. (Sugerencia: efectuar un análisis en energías).
3. El agua fluye a través de un tubo de sección variable. Si el flujo es laminar y el diámetro de la *parte A* es mayor que el diámetro de la *parte B* (Figura 1). Indique la relación entre las partes *A* y *B* de la presión y la velocidad.

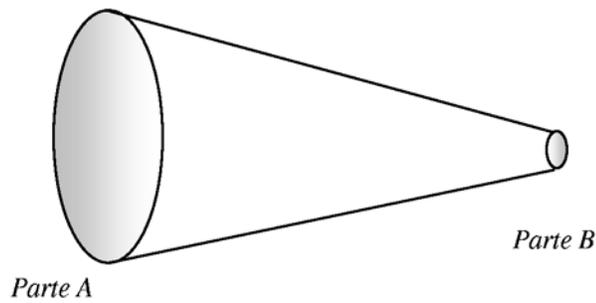


Figura 1

4°: PARTE PRACTICA

1. Dos diminutas esferillas semejantes de masa m están colgadas de hilos de seda de longitud L y portan cargas iguales q como se muestra en la Figura 2. Suponga que el ángulo θ es tan pequeño que la $\text{tg } \theta$ puede ser reemplazada por su igual aproximado, es decir, $\text{sen } \theta$. Determine para esta aproximación la separación entre las esferillas.

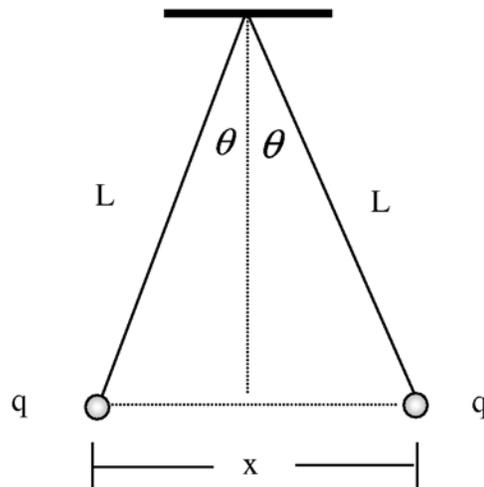


Figura 2

2. En la *Figura 3* se muestra la continuación de un yo – yo. Suponga que parte del reposo y que desciende una altura $h = 50$ cm. Encontrar sus velocidades finales de traslación y rotación. En un yo – yo real, el radio r del eje es mucho más pequeño que el radio exterior R . Como ejemplo típico suponga que: $R = 10r = 5$ cm. Considere todo el yo – yo como un cilindro de radio R .

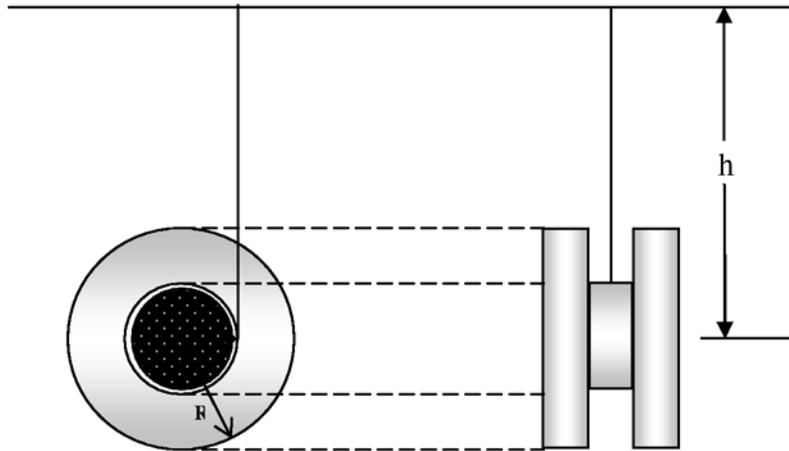


Figura 3

3. En el curso de 24 horas, una muchacha de 65kg pasa 8h en el escritorio, 2h en trabajos sin importancia en casa, 1h en trotar 5 millas, 5h en actividad moderada y 8h durmiendo, ¿Cuál es el cambio de su energía interna en este periodo?. Use la tabla No1 y suponga que un corredor de 65kg corre 5millas en 1h y usa alrededor 120kcal/min.

Tabla No 1: Ritmo metabólico y de consumo de oxígeno en varias actividades de un hombre de 65kg.

Actividad	Ritmo de consumo de O_2 (ml/min kg)	Ritmo metabólico (Kcal/h.)	Ritmo metabólico (W)
Dormir	3.5	70	80
Actividad ligera(vestirse, caminar lento trabajo de escritorio)	10	200	230
Actividad moderada(caminar de prisa)	20	400	465
Actividad fuerte (balón cesto, brazada rápida de pecho)	30	600	700
Actividad extrema (carrera de bicicleta)	70	1400	1600

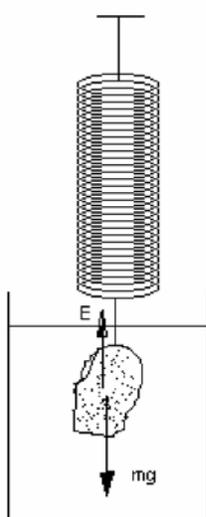
4. Dos partículas se mueven en un campo de gravedad homogéneo con una aceleración igual a g . En el momento inicial ambas se encontraban en un mismo punto y sus velocidades dirigidas horizontalmente y en sentidos opuestos eran $v_1 = 3$ m/s y $v_2 = 4$ m/s. Hallar la distancia entre las partículas en el momento en que los vectores de sus velocidades resultan ser mutuamente perpendiculares.

Examen de 4° de Secundaria**4°: PARTE EXPERIMENTAL****DETERMINACIÓN DE LA DENSIDAD DE UNA PIEDRA****1. Objetivo**

Graficar la relación funcional entre la masa que se cuelga de un elástico y su estiramiento.

Utilizando esta curva de calibración podemos determinar la densidad de un cuerpo utilizando la Ley de Arquímedes.

Si pesamos con un dinamómetro un objeto obteniendo una masa m y luego volvemos a pesar el mismo objeto pero sumergido en el líquido, tendremos que:



$$F = mg - E$$

$$F = mg - \rho_L Vg$$

$$\frac{F}{g} = m^* = m - \rho_L V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m - m^*}{\rho_L}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{m - m^*} \rho_L$$

2. Experimento.

Colgando distintas masas conocidas de nuestro elástico medimos su deformación respecto a su longitud natural y obtenemos una tabla de calibración que nos permite determinar la masa desconocida de un cuerpo.

Por definición, se utiliza el agua como patrón para definir las unidades de masa. Un gramo [g] es la masa de un centímetro cúbico o mililitro de agua. ($1\text{cm}^3 = 1\text{ ml}$)

Por tanto, utilizando una jeringa hipodérmica de 10 ml, podemos construir nuestra tabla de calibración colocando de 10 en 10 g. de agua en una bolsa plástica colgada del dinamómetro. Usamos una bolsa de plástico porque su masa es pequeña y podemos despreciarla.

Una vez construida la tabla de calibración, graficamos m vs. x para obtener la curva de calibración.

Pesamos la piedra, luego pesamos la piedra sumergida en agua ($\rho_{H_2O} = 1\text{g/cm}^3$) y determinamos así la densidad de la piedra.

Examen de 4° de Secundaria**4°: SOLUCION PARTE CONCEPTUAL**

- En un capacitor de placas cuadradas paralelas con área A y separadas en el vacío una distancia d , su capacitancia:
 - Si d se reduce, la capacitancia aumenta.
 - Si se coloca una lámina de cobre entre las placas sin que toque ninguna de ellas, no pasa nada con la capacitancia.
 - Si se duplica el área de ambas placas, entonces se duplica su capacitancia.
 - Si se duplica el área de una placa solamente, no pasa nada con la capacitancia.
 - Si se desliza a las placas paralelamente entre sí de modo que el área de traslape sea del 50%, la capacitancia se reduce a la mitad.
 - Si se duplica la diferencia de potencial, entonces la capacitancia también disminuye a la mitad.
- Haciendo un análisis de energías para cada una de las pelotas, podemos ver que:

$$E_{inicial} = E_{final}$$

$$m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_{01}^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

$$m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_{02}^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_{03}^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_3^2$$

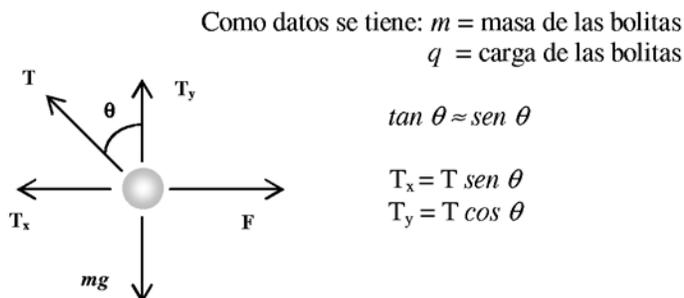
Como $v_{01} = v_{02} = v_{03}$, se puede concluir rápidamente que las velocidades con que llegan las tres pelotas lanzadas con diferentes ángulos desde una misma altura son iguales, es decir:

$$v_1 = v_2 = v_3$$

- Ver Solución de la pregunta 3. de la parte Conceptual del examen de 3° de Secundaria.

4°: SOLUCION PARTE PRACTICA

- Un diagrama de fuerzas para una de las dos bolitas cargadas sería:



Por la **Ley de Coulomb**:

$$F = k \frac{q^2}{x^2}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F = T_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow m \cdot g = T_y \quad (2)$$

Ahora, reemplazando valores obtendremos las ecuaciones que nos llevarán al resultado esperado:

$$\frac{k \cdot q^2}{x^2} = T \cdot \text{sen} \theta \quad ; \quad m \cdot g = T \cos \theta \rightarrow T = \frac{m \cdot g}{\cos \theta}.$$

Por lo tanto se puede obtener reemplazando la tensión T :

$$\frac{k \cdot q^2}{x^2} = m \cdot g \cdot \tan \theta \rightarrow x^2 = \frac{k \cdot q^2}{m \cdot g \cdot \tan \theta}$$

Pero, como se asume que $\tan \theta \approx \text{sen} \theta$, entonces:

$$x^2 = \frac{k \cdot q^2}{m \cdot g \cdot \text{sen} \theta}$$

Por otro lado, $\text{sen} \theta = \frac{x}{2 \cdot L}$, este hecho hace que el valor buscado de la separación x entre las esferillas:

$$x^2 = \frac{k \cdot q^2 \cdot 2 \cdot L}{m \cdot g \cdot x} \rightarrow x^3 = \frac{k \cdot q^2 \cdot 2 \cdot L}{m \cdot g}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{k \cdot q^2 \cdot 2 \cdot L}{m \cdot g}}$$

2.

Para solucionar el problema del yo-yo, se puede recurrir a la conservación de la *energía potencial* y la *energía cinética* del fenómeno; para este caso, la *energía cinética* es una *energía de rotación* del yo-yo. Dado que el yo-yo posee dos radios (r y R), cada uno ellos afecta al *Momento de Inercia total* del mismo, entonces para el radio menor r su momento de inercia será:

$$I_r = m \cdot r \tag{1}$$

Para el caso del radio mayor R , es un tanto diferente dado que gira con un *Momento de Inercia* igual a:

$$I_R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \tag{2}$$

Esto, debido a la geometría de la rotación, es decir, al momento angular que sufre cada radio. No debemos olvidar que m es la masa del yo-yo. Ahora, por la conservación de la energía se tiene que:

$$\text{Energía Potencial} = \text{Energía Rotacional}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} I_{Total} \cdot \omega^2$$

Debemos notar que I_{Total} es equivalente a una masa y es la suma de los momentos de inercia para r y R ; reemplazando valores obtendremos:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \cdot R^2 + m \cdot r^2 \right) \cdot \omega^2$$

$$2 \cdot g \cdot h = \left(\frac{R^2}{2} + r^2 \right) \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{R^2 + 2r^2}}$$

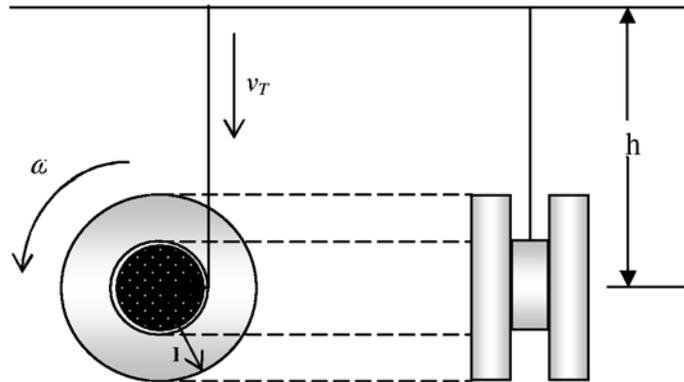
Es así que se obtiene el valor de la velocidad angular o de rotación ω para el yo-yo, entonces si reemplazamos los valores numéricos correspondientes se obtiene que:

$$\omega = 87.67 \text{ rad / sg}$$

Para el caso de la velocidad de traslación v_T del yo-yo, simplemente empleamos las siguientes relaciones para movimientos giratorios, con $r = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$:

$$v_T = \omega \cdot r$$

$$v_T = 0.438 \text{ m / sg}$$



3.

De la Tabla N°1, nos interesa la columna del Ritmo metabólico en kilocalorías por hora (kcal/h) del hombre de 65 kg para hacer las respectivas equivalencias en cuanto al cambio de energía interna ΔU que experimenta la muchacha, pues ella pesa lo mismo que el hombre. Entonces, según el cuadro tendremos que la muchacha varía su energía como:

$$\Delta U = - \text{TCL} \times 200 \text{ (kcal/h)} - \text{TCM} \times 400 \text{ (kcal/h)} - \text{TD} \times 70 \text{ (kcal/h)} - \text{TT} \times \text{CMHH} \times \text{EMUH}$$

Donde, las variables empleadas según la tabla y su correspondiente a la actividad de la muchacha:

TCL = tiempo actividad ligera, que para la muchacha suman las 2 horas de trabajo en casa y 8 horas de escritorio; TCM = tiempo actividad moderada; TD = tiempo durmiendo; TT = tiempo de trote; CMHH = cantidad de millas por hora que corre el hombre y que son 5 millas en 1 hora (mi/h); EMUH = energía por milla usada por el hombre, que como dato son 120 kcal por milla (kcal/mi) El signo negativo de ΔU se debe, como sabemos, a que la energía interna consumida por la muchacha representa una pérdida de la misma. Entonces, reemplazando valores obtendremos que:

$$\Delta U = -10 \text{ h} \times 200 \text{ (kcal/h)} - 5 \text{ h} \times 400 \text{ (kcal/h)} - 8 \times 70 \text{ (kcal/h)} - 1 \text{ h} \times 5 \text{ mi/h} \times 120 \text{ kcal/mi}$$

$$\Delta U = -5160 \text{ kcal}$$

Actividad	Ritmo metabólico (Kcal/h.)
Dormir	70
Actividad ligera (vestirse, caminar lento trabajo de escritorio)	200
Actividad moderada (caminar de prisa)	400
Actividad fuerte (balón cesto, brazada rápida de pecho)	600
Actividad extrema (carrera de bicicleta)	1400

4. Ver Solución de la pregunta 3. de la parte Practica del examen de 3° de Secundaria.

Examen de 4° de Secundaria**4°: SOLUCIÓN PARTE EXPERIMENTAL****CALIBRACIÓN DE UN DINAMÓMETRO DE ELÁSTICO.
INTERPOLACIÓN.
DETERMINACIÓN DE LA DENSIDAD DE UNA PIEDRA****Objetivo**

Graficar la relación funcional entre la masa que se cuelga de un elástico y su estiramiento.

Utilizando esta curva de calibración podemos determinar la densidad de un cuerpo utilizando la Ley de Arquímedes.

Teoría

Cuando se aplica una fuerza, por ejemplo un peso colgado, sobre un elástico, la deformación del elástico de goma es función de la fuerza que se aplica sobre él.

De modo que, se puede establecer una relación funcional:

$$F = f(x)$$

entre la fuerza aplicada (F) y el estiramiento del elástico respecto a su tamaño natural (x) En el caso de los elásticos de goma esta relación no es lineal, como se comprobará en el experimento.

Si la fuerza que se aplica es un peso, dado que $F = mg$, entonces se puede establecer una relación funcional:

$$m = \frac{1}{g} f(x) = f'(x)$$

de la masa con la deformación del elástico.

Una vez calibrado el dinamómetro de elástico, se lo utiliza para medir la masa de otros cuerpos.

Interpolación

Al hacer la calibración experimental obtendremos un conjunto finito de pares de valores (x,m), donde x es el estiramiento del dinamómetro y m la masa correspondiente.

Una vez que tenemos nuestra tabla de calibración al hacer una medida x podemos obtener su correspondiente m interpolando entre los dos pares de valores de la tabla entre los que se encuentra la lectura x de modo que $x_1 < x < x_2$.

La interpolación consiste en unir los puntos (x_1, m_1) y (x_2, m_2) por una recta y obtener el valor m por proporcionalidad.

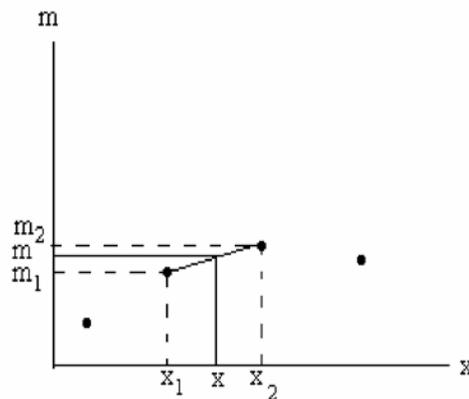


figura 1

Tenemos entonces que:

$$\frac{m_2 - m_1}{x_2 - x_1} = \frac{m - m_1}{x - x_1}$$

$$m = m_1 + \frac{m_2 - m_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Ley de Arquímedes

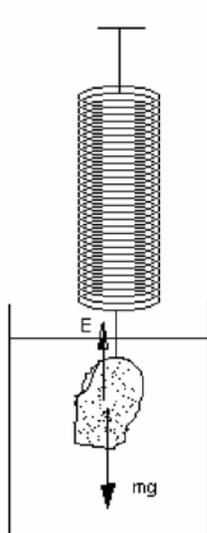
Cuando se sumerge un cuerpo en un fluido, éste ejerce sobre el cuerpo una fuerza de empuje en dirección contraria a la gravedad, es decir hacia arriba, que es igual al peso de la masa de agua desplazada por el cuerpo sumergido.

Esto se debe a que la presión hidrostática aumenta con la profundidad de manera que la fuerza hidrostática resultante sobre el cuerpo por debajo es mayor que la fuerza hidrostática sobre el cuerpo por arriba, resultando de ello una fuerza de empuje hacia arriba. Como en el espacio que ocupa el cuerpo antes se encontraba el fluido y éste estaba en equilibrio, concluimos, sin mayores demostraciones, que la fuerza de empuje es igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo.

$$E = m_L g$$

donde E es la fuerza de empuje de Arquímedes, m_L la masa de líquido desplazado por el cuerpo y g la constante de la gravedad.

Si pesamos con un dinamómetro un objeto obteniendo una masa m y luego volvemos a pesar el mismo objeto pero sumergido en el líquido, tendremos que:



$$F = mg - E$$

$$F = mg - \rho_L Vg$$

$$\frac{F}{g} = m^* = m - \rho_L V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m - m^*}{\rho_L}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{m - m^*} \rho_L$$

Donde m es la masa del cuerpo, m^* es la masa aparente del cuerpo cuando se lo mide sumergido en el líquido; V es el volumen sumergido, ρ_L es la densidad del líquido y ρ la densidad del cuerpo.

De este modo se puede medir la densidad de un cuerpo, conocida la densidad del líquido en el que se lo sumerge.

Figura 2

Empuje de Arquímedes

Experimento.

Colgando distintas masas conocidas de nuestro elástico medimos su deformación respecto a su longitud natural y obtenemos una tabla de calibración que nos permite determinar la masa desconocida de un cuerpo.

Por definición, se utiliza el agua como patrón para definir las unidades de masa. Un gramo [g] es la masa de un centímetro cúbico o mililitro de agua. ($1\text{cm}^3 = 1\text{ml}$)

Por tanto, utilizando una jeringa hipodérmica de 10 ml, podemos construir nuestra tabla de calibración colocando de 10 en 10 g. de agua en una bolsa plástica colgada del dinamómetro. Usamos una bolsa de plástico porque su masa es pequeña y podemos despreciarla.

Una vez construida la tabla de calibración, graficamos m vs. x para obtener la curva de calibración.

Pesamos la piedra, luego pesamos la piedra sumergida en agua ($\rho_{H_2O}=1g/cm^3$) y determinamos así la densidad de la piedra.

Precisión

En nuestro caso la precisión en la medida de la longitud del elástico es de 0,1 cm y en la medida de la masa de agua es de 0,2 g. Tomaremos la mitad de estos valores como errores de las medidas de x y m respectivamente.

Entonces: $E_x=0,05cm$ y $E_m=0,1g$.

Resultados experimentales. Ejemplo.-

Estiramiento [cm]	Masa [g]	Estiramiento [cm]	Masa [g]	Estiramiento [cm]	Masa [g]
0	0	2,3	180	6,4	360
0,1	10	2,4	190	6,7	370
0,2	20	2,6	200	7	380
0,3	30	2,8	210	7,4	390
0,4	40	3	220	7,7	400
0,5	50	3,2	230	8	410
0,6	60	3,4	240	8,3	420
0,7	70	3,6	250	8,6	430
0,8	80	3,8	260	9	440
0,9	90	4,1	270	9,3	450
1	100	4,3	280	9,6	460
1,2	110	4,6	290	10	470
1,3	120	4,8	300	10,3	480
1,5	130	5	310	10,7	490
1,7	140	5,3	320	11	500
1,8	150	5,6	330	11,5	510

El gráfico de calibración de estos datos es el siguiente:

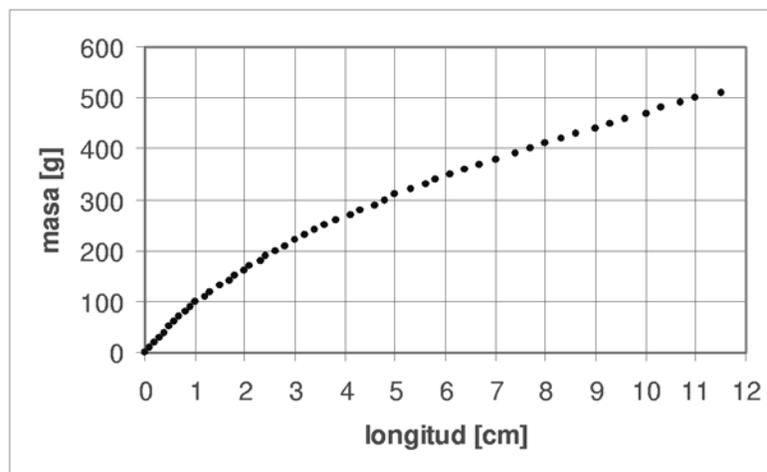


Figura 3

Masa vs. Estiramiento

Como se comprueba, la deformación de un elástico de goma no es de ninguna manera lineal respecto a la fuerza que lo deforma.

El rango elástico en que se puede considerar una relación lineal entre la masa y la deformación va de cero a 1cm.

En esta zona se cumple la Ley de Hooke:

$$F = kx$$

$$m = \frac{k}{g} x = \lambda x$$

En la Figura 4 se muestra el ajuste lineal en esta zona que ha resultado perfecto.

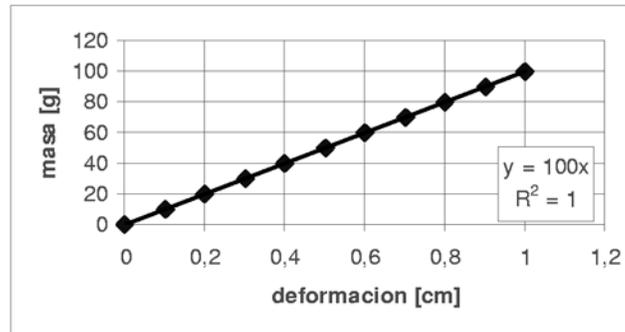


Figura 4
Zona lineal.

Cálculo de la densidad de la piedra.

Estas fueron las medidas de la masa de la piedra fuera y sumergida en el agua.

Medida fuera del agua (x)	Medida sumergida (x*)
3,1 cm	1,6 cm

Los valores de m y m^* se obtienen de la tabla de calibración o de la gráfica de calibración por interpolación. Sin embargo, como el error de precisión es 0,05 cm corresponde hacer la interpolación entre los puntos (3cm,220g) y (3,2cm,230g) para el caso de la medida fuera del agua y entre los puntos (1,5cm,130g) y (1,7cm,140g) para la medida sumergida.

Entonces la masa de la piedra será:

$$m = 220 + \frac{230 - 220}{3,2 - 3} (3,1 - 3) = 225 \text{ g}$$

Error:

$$E_m = 0,1 + 5 \left(\frac{0,2}{10} + \frac{0,1}{0,1} + \frac{0,1}{0,2} \right) = 7,7 \text{ g}$$

Entonces:

$$m = (225 \pm 8) \text{ g}$$

Y, la masa aparente de la piedra sumergida será:

$$m^* = 130 + \frac{140 - 130}{1,7 - 1,5} (1,6 - 1,5) = 135 \text{ g}$$

Error:

$$E_{m^*} = 0,1 + 5 \left(\frac{0,2}{10} + \frac{0,1}{0,1} + \frac{0,1}{0,2} \right) = 7,7 \text{ g}$$

Entonces:

$$m^* = (135 \pm 8) \text{ g}$$

Calculamos la densidad:

$$\rho = \frac{m}{m - m^*} \rho_{H_2O}$$

$$\rho = \frac{225}{90} \text{ g/cm}^3 = 2,5 \text{ g/cm}^3$$

El error será:

$$\varepsilon_\rho = \rho \left(\frac{\varepsilon_m}{m} + \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_{m^*}}{m - m^*} \right)$$

$$\varepsilon_\rho = 0,5 \text{ g/cm}^3$$

La densidad de la piedra es, entonces:

$$\rho = (2,5 \pm 0,5) \text{ g/cm}^3$$

UNA EQUIVOCACIÓN COMÚN EN EL CÁLCULO DE PROPAGACIÓN DE ERRORES

(Um Engano Comum em Cálculo de Propagação de Erros)
(A Common Mistake in Calculation of Error Propagation)

Wilton Pereira da Silva (DF)¹, Cleide M. D. P. S. e Silva (DF),
Antônio G. B. Lima (DEM), Diogo D. P. S. e Silva (DME)
Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 58109-970, PB, Brasil
Cleiton D. P. S. e Silva
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, São Paulo, Brasil

RESUMEN

Este artículo discute la aplicación de las fórmulas usuales para la propagación de errores en las cuatro operaciones aritméticas normalmente utilizadas en cursos introductorias de Física Experimental. El artículo muestra dos resultados discrepantes, provenientes del uso de tales fórmulas en un mismo conjunto de datos. Este conjunto de datos corresponde a un experimento sobre resortes unidos, en el cual se desea determinar la constante elástica del resorte equivalente. Se identifica la causa de la discrepancia y esa identificación sugiere que se debe evitar el uso de tales fórmulas. La fórmula general para propagación de errores es utilizada en la solución correcta del problema, y las dificultades relativas a su uso durante un curso inicial de Física Experimental son analizadas. Se sugiere una forma alternativa para el cálculo del error propagado que, al mismo tiempo, elimina el problema de resultados discrepantes y esquivas las dificultades en el uso de la fórmula general.

RESUMO

Este artigo discute a aplicação das fórmulas usuais para a propagação de erros nas quatro operações aritméticas, normalmente utilizadas em cursos introdutórios de Física Experimental. O artigo mostra dois resultados discrepantes, provenientes do uso de tais fórmulas em um mesmo conjunto de dados. Tal conjunto de dados refere-se a um experimento sobre associação de molas, no qual se deseja determinar a constante de elasticidade da mola equivalente. A causa da discrepância é identificada, e essa identificação sugere que tais fórmulas devem ser evitadas. A fórmula geral para propagação de erros é utilizada na solução correta do problema, e as dificuldades relativas ao seu uso durante um curso inicial de Física Experimental são analisadas. É sugerida uma forma alternativa para o cálculo do erro propagado que, ao mesmo tempo, elimina o problema de resultados discrepantes e contorna as dificuldades no uso da fórmula geral.

ABSTRACT

This paper discusses the application of formulas applied to error propagation in the four arithmetic operations, usually used in introductory courses about Experimental Physics. The paper shows two differing results, referring to the use of such formulas in a same data set. This data set refers to an experiment about association of springs, in which one wants to determine the constant of elasticity of the equivalent spring. The cause of the discrepancy is identified, and that identification suggests that such formulas should be avoided. The general formula for error propagation is used in the correct solution of the problem, and the difficulties relative to its use during an initial course of Experimental Physics are analyzed. An alternative form of calculating the error propagated is suggested, and at the same time, it eliminates the problem of differing results and the difficulties in the use of the general formula.

1. INTRODUCCIÓN

En eventos en que participan profesores de Física, tales como congresos y encuentros, conversaciones informa-

¹Email: wiltonps@uol.com.br

TABLA 1

Elongación y fuerza aplicada al resorte 1.

$X (cm)$	2,5	4,4	7,6	10,4	12,2	15,0	17,5	20,1
$F (gf)$	15,0	30,0	45,0	60,0	75,0	90,0	105,0	120,0

TABLA 2

Elongación y fuerza aplicada al resorte 2.

$X (cm)$	5,8	11,5	17,0	22,9	28,1	34,5	38,7	45,4
$F (gf)$	15,0	30,0	45,0	60,0	75,0	90,0	105,0	120,0

les permiten constatar que, generalmente, la enseñanza de Física Experimental no tiene como pre-requisito un curso sobre tratamiento de datos experimentales. Esta constatación puede ser corroborada, por ejemplo, en [1, 2 e 3]. Normalmente, nociones sobre teoría de errores son presentadas de manera resumida al inicio del primer curso dedicado a la disciplina. La falta de una discusión más amplia y mas profunda sobre el tema lleva, muchas veces, a una cierta superficialidad en el análisis de datos experimentales, pudiendo provocar distorsiones que, pueden arraigarse de forma definitiva en el pensamiento de muchos alumnos. El problema de la falta de un conocimiento más sólido sobre tratamiento de datos se hace aún más evidente cuando los alumnos deben aplicar fórmulas de propagación de errores, en la determinación de parámetros provenientes de medidas efectuadas en laboratorio.

Este artículo aborda un tipo específico de problema relacionado a la enseñanza de propagación de errores, y tuvo su origen a partir de una sugerencia del primero de los autores a dos alumnos de un mismo curso. La sugerencia se refería a la secuencia de operaciones en un cálculo de propagación de errores, usando las mismas fórmulas y los mismos datos experimentales. Como los alumnos obtuvieron resultados diferentes para el error propagado, y ninguno de ellos detectó errores groseros en sus cálculos, se pidió una explicación razonable para la discrepancia. Como no la hubo, el problema fue planteado a todos los alumnos del grupo. Un nuevo fracaso hizo que el problema se extendiera por los cuatro profesores de la disciplina a los once grupos de ese período, con resultados análogos. Quedaba claro, entonces que el tema “propagación de errores” no estaba siendo abordado de forma satisfactoria en los cursos de Física Experimental I: no bastaba un texto inicial definiendo el tema (en el que eran mencionadas, superficialmente, ciertas restricciones), seguido de la deducción de las fórmulas para las operaciones aritméticas. Esto se hizo evidente a través del problema propuesto a los alumnos y, entonces, era necesario buscar alternativas para la enseñanza de este asunto, de lo que resultó este artículo.

2. EL EXPERIMENTO GENERADOR DEL PROBLEMA

El experimento, detallado en [4], consiste de dos resortes cuyas constantes elásticas previamente se determinan midiendo la elongación X en función del valor F de la fuerza aplicada en sus extremos. Se sugiere que el gráfico de F versus X se trace de tal modo que se destaque que se trata de rectas y que se pueda visualizar “cuán cerca” del origen del sistema de ejes pasa cada recta. Para cada conjunto de datos, se recomienda el uso del método de los mínimos cuadrados para determinar el valor medio de cada constante elástica y su desviación estándar. En esta fase inicial del experimento, se pide al alumno que calcule el valor de la constante elástica equivalente para los dos resortes unidos en serie. El experimento todavía tiene una fase final, con la toma de datos para los resortes asociados en serie, que no se detallará aquí porque el problema en cuestión es independiente de esa parte.

2.1. Datos Obtenidos en el Experimento

El experimento se realizó utilizando el kit KEM [5], que es un “Kit para Experimentos de Mecánica”, utilizado en el laboratorio de Física Experimental I donde se detectó el problema relativo a la enseñanza de propagación de errores. Para efecto de la presentación de las medidas efectuadas, vamos a designar los dos resortes como 1 y 2. Los resultados obtenidos se presentan en las tablas 1 y 2.

Los datos de estas tablas se obtuvieron con cada resorte colgado en posición vertical. Inicialmente se colocó una masa de 50,0g en la bandeja colgada en su extremidad inferior. Esta masa busca minimizar el efecto de la propia masa del resorte y, a partir de ahí, se inicia el experimento, con incrementos de masa, de 15,0 en 15,0g. En este experimento se asume que los errores sistemáticos pueden despreciarse, de modo que los errores a ser considerados son los provenientes de fluctuaciones estadísticas. Para garantizar una cierta independencia en los valores obtenidos para las constantes elástica, se hicieron dos montajes distintos, uno para cada resorte. Hay que resaltar que, aquí, por comodidad, se utilizó el

sistema técnico de unidades en el proceso de medición, por ser adecuado al ambiente del laboratorio.

2.2. Análisis Preliminar de los Datos

El análisis de los datos se hizo a través del software LAB Fit [6]. Una simple inspección gráfica o también el test t de Student [7] mostraría que es bastante razonable proponer, para los dos resortes, el modelo dado por la ley de Hooke (ver, por ejemplo, [8]):

$$F = KX, \quad (1)$$

donde K es la constante elástica. Aunque conceptualmente la variable independiente de este experimento sea la fuerza F aplicada en cada extremo del resorte, en todos los análisis que siguen se considerará a la variable X como independiente, obedeciendo el modelo dado por la Ec. (1). Ajustando la función de la Ec. (1) a los datos de las tablas (1) y (2), obtenemos:

$$\begin{aligned} K_1 &= (6,00 \pm 0,05)gf/cm, \quad y \\ K_2 &= (2,653 \pm 0,014)gf/cm. \end{aligned} \quad (2)$$

2.3. Constante Elástica del Resorte Equivalente para dos Resortes Unidos en Serie

Es simple demostrar que, si cada uno de los resortes obedece a la Ec. (1), entonces la constante elástica del resorte equivalente, K_{eq} , estará dada por (ver, por ejemplo, [9])

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}, \quad (3a)$$

o, también

$$K_{eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}. \quad (3b)$$

Conforme veremos, aunque las Ecs. (3a) y (3b) sean equivalentes, desde el punto de vista matemático, presentan resultados diferentes para el error propagado, si no se toma cuidado.

3. FÓRMULAS PARA LA PROPAGACIÓN DE ERRORES EN LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Aún cuando el tema de la “propagación de errores” sea abordado de forma satisfactoria en los libros de texto sobre teoría de errores (ver, por ejemplo, [10, 11, 12, 13 y 14]), en algunos cursos iniciales de Física Experimental el tema se reduce a las cuatro operaciones aritméticas y, normalmente, el tratamiento del tema es bastante resumido. Un resumen típico puede encontrarse en [15]. Para las cuatro operaciones aritméticas, las fórmulas de propagación son deducidas suponiendo que se tienen dos medidas independientes dadas por

$$X = \bar{X} \pm \sigma_{Xm} \quad y \quad Y = \bar{Y} \pm \sigma_{Ym} \quad (4)$$

que, por simplicidad, se consideran como positivas. En la Ec. (4) \bar{X} y \bar{Y} son los valores medios de las medidas X y Y , σ_{Xm} y σ_{Ym} son sus respectivas incertidumbres. Entonces, las operaciones aritméticas entre esas medidas se pueden realizar conforme veremos a continuación.

3.1. Suma y Resta

Estas operaciones se pueden sintetizar, para el cálculo de la desviación máxima absoluta y de la desviación estándar, como sigue:

$$OP = \overline{OP} \pm (\sigma_{Xm} + \sigma_{Ym}) \quad (5a)$$

y

$$OP = \overline{OP} \pm \sqrt{\sigma_{Xm}^2 + \sigma_{Ym}^2}, \quad (5b)$$

donde “ OP ” simboliza la operación (suma o resta) y “ \overline{OP} ” representa la operación con los valores medios de las medidas. A pesar de ser conservativa con relación al error propagado, la Ec. (5a) en general solo es utilizada con fines didácticos y, en el caso de medidas independientes, debe ser relegada en favor de la desviación estándar propagada, dada por la Ec. (5b), que substituye la suma de los módulos de las desviaciones por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de tales desviaciones.

3.2. Multiplicación y División

Tales operaciones pueden resumirse, en cuanto a las desviaciones máxima y estándar, por las siguientes expresiones:

$$OP = \overline{OP} \pm \overline{OP} \left(\frac{\sigma_{Xm}}{X} + \frac{\sigma_{Ym}}{Y} \right) \quad (6a)$$

y

$$OP = \overline{OP} \pm \overline{OP} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Xm}}{X} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{Ym}}{Y} \right)^2}, \quad (6b)$$

donde, nuevamente, “ OP ” y “ \overline{OP} ” representan, respectivamente, la operación (multiplicación o división) y la operación con los valores medios. Estas fórmulas, dadas por las Ecs. (5a), (5b), (6a) y (6b), están presentes en la mayoría de los libros de texto sobre teoría de errores (ver, por ejemplo, las páginas 50, 53, 60 y 61 de la referencia [14]). Igual que la Ec. (5a), la Ec. (6a) define una regla provisional, de cuño didáctico y, en el caso de medidas independientes, debe ser relegada en favor de la Ec. (6b), que substituye la suma de las desviaciones relativas por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de estas desviaciones. En la sección 5.1, se hará un estudio más general para los límites de validez de cada una de estas fórmulas relativas al error de propagación en la división.

4. CÁLCULO DE LA CONSTANTE ELÁSTICA PARA LA ASOCIACIÓN EN SERIE

Como se mostrará, fueron utilizadas las fórmulas dadas en las Ecs. (5b) y (6b) y los resultados obtenidos para las constantes elásticas de los resortes, dadas en la Ec. (2) para el cálculo de la constante elástica equivalente de los dos resortes asociados en serie. Obsérvese que hay dos posibles caminos distintos para determinar, paso a paso, la constante elástica equivalente: mediante las Ecs. (3a) y (3b).

4.1. Formulación por el Camino 1: Uso de la Ec. (3a)

Con el uso de la Ec. (3a) podemos escribir:

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{6,00 \pm 0,05} + \frac{1}{2,653 \pm 0,014} \quad (7)$$

Recordando que el número exacto 1 es lo mismo que (1 ± 0) , las dos divisiones en el segundo miembro de la Ec. (7) se pueden realizar de acuerdo con la Ec. (6b). Luego podemos realizar la suma obtenida por el procedimiento anterior a través de la Ec. (5b) para, finalmente, reutilizar la Ec. (6b) para invertir el resultado obtenido. Finalmente, encontramos:

$$K_{eq} = (1,840 \pm 0,008)gf/cm. \quad (8)$$

4.2. Formulación por el Camino 2: Uso de la Ec. (3b)

Con el uso de la Ec. (3b) y los resultados ya mencionados para K_1 y K_2 , podemos escribir:

$$K_{eq} = \frac{(6,00 \pm 0,05)(2,653 \pm 0,014)}{(6,00 \pm 0,05) + (2,653 \pm 0,014)} \quad (9)$$

Luego, usando la Ec. (6b) para realizar la multiplicación en el numerador y la Ec. (5b) para la adición en el denominador, seguida de la reutilización de la Ec. (6b) para efectuar la operación final de división, obtenemos:

$$K_{eq} = (1,840 \pm 0,021)gf/cm. \quad (10)$$

En todos los cálculos efectuados en los ítems 4.1 y 4.2 trabajamos con exceso de dígitos, haciendo un sólo redondeo al final de la secuencia de operaciones. Pero la desviación estándar del valor medio de K_{eq} obtenido en el ítem 4.1 es significativamente diferente del valor calculado en este ítem 4.2. En verdad, el último valor obtenido para la desviación es casi el triple del primero. Una discusión sobre el por qué de esta discrepancia y también sobre los cuidados que se deben tomar en la utilización de la Ec. (6b) se hará a continuación. Además de ello, se propondrá el uso de alternativas más generales en el cálculo de propagación de errores.

5. DISCUSIONES

Un análisis más cuidadoso de la sección 4 indica que el resultado obtenido en el ítem 4.1 (camino 1) es el correcto en tanto que aquel obtenido en 4.2 (camino 2) es errado. Para comprender esto es necesario investigar la

restricción que debería haber sido impuesta en la utilización de la Ec. (6b): "...suponiendo que se tengan dos medidas independientes dadas por...". El significado de esta frase es muy importante en la propagación de errores, y por eso ella se investigará en detalle. En el caso de la división, en que tenemos $OP = X/Y$, el resultado para el error propagado, dado por la Ec. (6a), se obtiene calculando los límites inferior y superior de la operación, con aproximación de primer orden (lo que requiere pequeñas desviaciones relativas), a través del siguiente razonamiento:

Límite inferior:

$$LI = \frac{\bar{X} - \sigma_{Xm}}{\bar{Y} - \sigma_{Ym}} \approx \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} - \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \left(\frac{\sigma_{Xm}}{\bar{X}} + \frac{\sigma_{Ym}}{\bar{Y}} \right) \quad (11a)$$

Límite superior:

$$LS = \frac{\bar{X} + \sigma_{Xm}}{\bar{Y} + \sigma_{Ym}} \approx \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} + \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \left(\frac{\sigma_{Xm}}{\bar{X}} + \frac{\sigma_{Ym}}{\bar{Y}} \right). \quad (11b)$$

Obviamente, los resultados obtenidos en las Ecs. (11a) y (11b) posibilitan escribir la Ec. (6a), obtenida para a división, como sigue:

$$\text{Desvío Máximo Absoluto: } \frac{1}{2}|LS - LI| \quad (11c)$$

$$\text{Valor Medio: } \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{1}{2}(LS + LI) \quad (11d)$$

Naturalmente, la Ec. (6b) puede obtenerse por la simple sustitución de la suma de las desviaciones relativas por la suma de los cuadrados de estas desviaciones.

Por otro lado, una reflexión más atenta sobre las Ecs. (11a) y (11b) permite afirmar que el razonamiento allí utilizado presupone que el numerador y el denominador pueden asumir valores, uno independientemente del otro. Esto porque, cuando uno asume el mayor valor para la variable, el otro asume el menor: "el numerador debe ser independiente del denominador". Obviamente esto no se aplica a la fórmula para la constante elástica dada por la Ec. (3b), ya que tanto el numerador como el denominador son funciones de las mismas variables: K_1 y K_2 . Entonces, el numerador no es independiente del denominador y, consecuentemente, la secuencia de operaciones del ítem 4.2 no son válidas.

Una vez detectados estos problemas con la fórmula dada por la Ec. (6b), el paso siguiente será proponer una forma de evitarlos.

5.1. La Fórmula General para el Cálculo del Error Propagado

Un estudio más minucioso sobre teoría de errores permite afirmar que, para una función f de n variables z_1, z_2, \dots, z_n , el error propagado de la función debido a los errores de sus variables independientes se calcula, con una aproximación de primer orden, por la siguiente expresión (ver [10 y 11], por ejemplo):

$$\sigma_{f_m} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial z_k} \text{cov}(z_j, z_k)}, \quad (12)$$

donde $\text{cov}(z_j, z_k)$ es la covariancia entre las variables independientes z_j y z_k .

Para una función con dos variables independientes, dadas por $X = \bar{X} \pm \sigma_{Xm}$ y $Y = \bar{Y} \pm \sigma_{Ym}$, siendo $\text{cov}(X, Y)$, la covariancia entre ellas, la Ec. (12) se transforma en:

$$\sigma_{f_m} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X} \sigma_{Xm}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \sigma_{Ym}\right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial Y} \text{cov}(X, Y)}, \quad (13)$$

en la que las derivadas se deben calcular para $X = \bar{X}$ y $Y = \bar{Y}$. Así, para la división (tema central de este artículo), dada por $f = X/Y$, la Ec. (13) toma la forma:

$$\sigma_{f_m} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Xm}}{\bar{Y}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}^2} \sigma_{Ym}\right)^2 - 2 \frac{\bar{X}}{\bar{Y}^3} \text{cov}(X, Y)}. \quad (14)$$

La Ec. (14) es general para la determinación del error propagado en la operación de división y, dependiendo del tipo de relación entre las variables X e Y , puede presentar resultados distintos, conforme veremos, para tres casos especiales.

5.1.1. La Ecuación (14) para X e Y Linealmente Dependientes Entre Sí: Caso 1

Si las variables X e Y fueran linealmente dependientes entre sí, y con el mismo sentido de crecimiento, entonces la covariancia entre ellas está dada por (ver CAAP. 4 de [11], por ejemplo):

$$\text{cov}(X, Y) = \sigma_{Xm} \sigma_{Ym} \quad (15)$$

Para esta situación el radicando en el segundo miembro de la Ec. (14) es un cuadrado perfecto, lo que reduce la ecuación a

$$\sigma_{f_m} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \left| \frac{\sigma_{Xm}}{\bar{X}} - \frac{\sigma_{Ym}}{\bar{Y}} \right| \quad (16a)$$

que corresponde al menor error propagado posible en la operación de división. Adicionalmente, debemos notar que, en el caso en que las variables X e Y sean iguales ($X = Y = \bar{Z} \pm \sigma_{Zm}$), la Ec. (16a) da cero para la desviación propagada, lo que es coherente con la intuición: la división de una medida entre sí misma, diferente de cero, aún cuando no sea conocida exactamente, tiene por resultado el valor exacto 1.

5.1.2. La Ecuación (14) para X y Y Linealmente Dependientes Entre Sí: Caso 2

Debemos observar que, en el caso en que las variables X e Y fuesen linealmente dependientes pero con sentido inverso de crecimiento, la covariancia entre estas variables vendría dada por $-\sigma_{Xm} \sigma_{Ym}$ [11]. En este caso, a Ec. (14) daría el siguiente resultado:

$$\sigma_{f_m} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \left(\frac{\sigma_{Xm}}{\bar{X}} + \frac{\sigma_{Ym}}{\bar{Y}} \right) \quad (16b)$$

que corresponde al máximo error propagado posible (desvío máximo), y es equivalente a la Ec. (6a) puesto que $\overline{OP} = \bar{X}/\bar{Y}$. Este resultado significa que a Ec. (6a) debería usarse sólo cuando las medidas involucradas en la división sean linealmente dependientes y con sentido inverso de crecimiento.

5.1.3. La Ecuación (14) para X e Y Independientes Entre Sí

En el caso de que X e Y sean variables independientes entre sí, la covariancia entre ellas es cero [10-14]. En este caso, colocando el término $(\bar{X}/\bar{Y})^2$ en evidencia en la Ec. (14) y extrayendo la raíz, obtenemos:

$$\sigma_{f_m} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Xm}}{\bar{X}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{Ym}}{\bar{Y}}\right)^2}, \quad (17)$$

que es la misma expresión obtenida para la desviación estándar en la Ec. (6b), para $\overline{OP} = \bar{X}/\bar{Y}$. Hay que observar que la Ec. (17), idéntica a la Ec. (6b), no es una fórmula general para la división: está restringida a los casos en que las variables independientes X e Y de la función tengan covariancia igual a cero, como es el caso de variables independientes entre sí.

5.2. Aplicación de la Fórmula General de Propagación de Errores a la Ec. (3b)

Hay que considerar que, en la Ec. (3b), aunque el numerador sea dependiente del denominador, las constantes elásticas K_1 y K_2 son independientes entre sí, puesto que el experimento para la determinación de K_1 se hizo de forma independiente de aquel para la determinación de K_2 . Esto significa que $\text{cov}(K_1, K_2) = 0$ y la Ec. (13) deriva en la siguiente expresión para el error propagado:

$$\sigma_{K_{eq}} = \sqrt{\left[\left(\frac{\bar{K}_2}{\bar{K}_1 + \bar{K}_2}\right)^2 \sigma_{K1m}\right]^2 + \left[\left(\frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_1 + \bar{K}_2}\right)^2 \sigma_{K2m}\right]^2}, \quad (18)$$

que produce el mismo resultado correcto obtenido en el ítem 4.1.

5.3. Una Alternativa al Uso de Derivadas

Un ejemplo semejante al que presentamos en este artículo para la división fue presentado por Taylor (pág. 66 de la referencia [14]) involucrando una diferencia de cantidades dependientes. Su propuesta para evitar el problema de resultados errados, contenidos en la solución paso a paso, fue la misma de la sección 5.2: uso de la ecuación general de propagación de errores. Pero, existen grados curriculares en los que el alumno cursa su primera disciplina de Física Experimental sin un conocimiento más profundo acerca de derivadas de funciones (ver, por ejemplo, [1 y 3]). En este caso, el uso de la Ec. (12) para el cálculo de propagación de errores es inviable, y esto justifica muchas veces la utilización de la Ec. (6b), ya que ella puede deducirse de forma simple, a partir de las Ecs. (11a) y (11b). Más, como fue constatado, la Ec. (6b) no es adecuada en muchas situaciones que involucran el cálculo de propagación de errores de medidas. Entonces, sería deseable la proposición de una forma alternativa para el cálculo del error propagado. Esa forma alternativa debería, al mismo tiempo, eliminar los problemas ya detectados con la Ec. (6b) y también evitar el uso de expresiones analíticas para derivadas, como se hizo en las Ecs. (14) y (18). Para una función en la que sus variables independientes no estén

correlacionadas entre sí estos requisitos deseables pueden ser satisfechos a través de la determinación del error propagado por partes: se determina individualmente el error propagado en la función debido al error de cada variable independiente. El razonamiento es semejante al que fue desarrollado en las Ecs. (11a) y (11b), pero con una diferencia fundamental: cada contribución para el error propagado de la función es calculada separadamente, con las demás variables independientes dadas por sus valores medios. Con este razonamiento, para una función $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$, la contribución de la i -ésima variable independiente al error propagado en esa función está dada por:

$$\sigma_{f m, z_i} = \frac{1}{2} |f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_i + \sigma_{z m i}, \dots, \bar{z}_n) - f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_i - \sigma_{z m i}, \dots, \bar{z}_n)| \quad (19)$$

En este caso, la expresión final para la función será:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n) \pm \sigma_{f m}, \quad (20)$$

donde $\sigma_{f m}$ es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todas las contribuciones obtenidas a través de la Ec. (19). Vale hacer notar que la Ec. (20) contiene una simplificación, que consiste en considerar el valor medio de la función como el valor de la función para los valores medios de las variables independientes.

5.4. Determinación de K_{eq} a través de la Solución Alternativa

Utilizando la alternativa propuesta en el ítem 5.3, la determinación de la desviación estándar para el valor medio de la constante elástica del resorte equivalente se hace, con la Ec. (3b), del siguiente modo:

Desviación de K_{eq} debido a K_1 :

$$\sigma_{K_{eq}, K_1} = \frac{1}{2} \left| \frac{(\bar{K}_1 + \sigma_{K1m})\bar{K}_2}{(\bar{K}_1 + \sigma_{K1m}) + \bar{K}_2} - \frac{(\bar{K}_1 - \sigma_{K1m})\bar{K}_2}{(\bar{K}_1 - \sigma_{K1m}) + \bar{K}_2} \right| \quad (21a)$$

y

Desviación de K_{eq} debido a K_2 :

$$\sigma_{K_{eq}, K_2} = \frac{1}{2} \left| \frac{(\bar{K}_2 + \sigma_{K2m})\bar{K}_1}{(\bar{K}_2 + \sigma_{K2m}) + \bar{K}_1} - \frac{(\bar{K}_2 - \sigma_{K2m})\bar{K}_1}{(\bar{K}_2 - \sigma_{K2m}) + \bar{K}_1} \right| \quad (21b)$$

Con los resultados de las Ecs. (21a) y (21b) podemos calcular la desviación estándar, dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones parciales, como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_{K_{eq}} &= \sqrt{\sigma_{K_{eq}, K_1}^2 + \sigma_{K_{eq}, K_2}^2} \\ &= \sqrt{0,004700\dots^2 + 0,006730\dots^2} = 0,008gf/cm. \end{aligned} \quad (22)$$

Naturalmente, este es el resultado correcto esperado para la desviación estándar propagada usando la Ec. (3b), que tiene el numerador dependiente del denominador.

6. CONCLUSIONES

Aunque apenas hemos mencionado el ejemplo dado por Taylor [14] para la sustracción, podemos concluir que la Ec. (5b) puede presentar resultados falsos, porque el razonamiento para su deducción es semejante a aquel evidenciado en

(11a) y (11b). En el ejemplo de este artículo, un aspecto que merece ser resaltado se refiere a la validez de la “fórmula viciada” dada por la Ec. (6b) para la división, puesto que también puede presentar resultados incorrectos, como aquel obtenido en el ítem 4.2. Su uso en el análisis de datos experimentales debe evitarse, a menos que tengamos un profundo conocimiento sobre el asunto y sepamos discernir las situaciones en que, de hecho, ella puede ser usada.

Lo deseable, en propagación de errores, sería el uso de la fórmula general dada por la Ec. (12). Esta ecuación involucra el uso de derivadas parciales, además del asunto “covariancia” que muchas veces ni se menciona en los cursos iniciales de Física Experimental. Esto dificulta el uso de tal ecuación, por ejemplo, en la disciplina Física Experimental I.

Una alternativa viable en experimentos para los cuales las variables independientes de la función no estén correlacionadas entre sí es el cálculo fragmentado del error propagado, para cada variable independiente, conforme se ha mostrado en el ítem 5.3. Esta alternativa incorpora el cálculo de derivadas parciales, pero de una forma sutil, perfectamente asimilable por alumnos que no tienen el pre-requisito del cálculo diferencial. Aunque tal alternativa no sea general, porque presupone no correlación en las variables independientes de la función, es mucho más versátil que las Ecs. (5b) y (6b), y puede aplicarse prácticamente, a cualquier función. Vale la pena resaltar, todavía, que tal alternativa utiliza un procedimiento único en el cálculo del error propagado de cualquier función, no siendo necesaria la memorización de un conjunto de fórmulas específicas por parte de los alumnos.

Como un último recurso, en el caso en que no haya disponibilidad de tiempo para el estudio de propagación de errores, en un primer curso de Física Experimental, los alumnos podrían utilizar software como el indicado en la referencia [6]. Para ello, la única exigencia es que el usuario sepa escribir una función usando la sintaxis de los lenguajes de programación. En este caso, aunque el alumno no sepa concretamente como se obtienen los resultados, por lo menos no corre el riesgo de obtener resultados equivocados por el uso de fórmulas inadecuadas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CNPq y a la FAPESP por la otorgación de becas Iniciación Científica, de Doctorado y de Productividad en Investigación, así como a los autores referenciados que, con sus investigaciones, contribuyeron en la realización de este artículo.

REFERENCIAS

- [1] UFRN <http://www.dimap.ufrn.br/computacao/fis315.-html> acceso en 10/01/2005.
- [2] UFPR <http://www.cartografica.ufpr.br/disciplinas/cf063.-html> acceso en 20/01/2005.
- [3] UFSCar <http://www.dep.ufscar.br/grad/paementa.htm> acceso en 20/01/2005.
- [4] Silva, Wilton P. e Silva, Cleide M. D. P. S., Mecânica Experimental para Físicos e Engenheiros, Ed. Universitária, João Pessoa (2000), pág. 101.
- [5] KEM – Kit para Experiências de Mecânica, disponível em <http://www.extensao.hpg.com.br/kits/kits.html> acceso en 15/01/2005.
- [6] LAB Fit Curve Fitting Software, online, download disponível em <http://www.labfit.net> acceso en 10/02/2005.

- [7] Bussab, Wilton O. e Morettin, Pedro A - Estatística Básica -Atual Editora LTDA, São Paulo, (1995), pág. 264.
- [8] Tipler, P. A., Física, Editora Guanabara Dois S. A. Rio de Janeiro, RJ, Vol. 1, 1a Edição, (1978), pág. 151.
- [9] Software Educacional Vest21 Mecânica, online, download disponível em www.extensao.hpg.com.br acesso em 10/02/2005.
- [10] Vuolo, J. H., Fundamentos da Teoria dos Erros, Ed. Edgard Blücher Ltda São Paulo, SP, 1a Edição, (1992).
- [11] Silva, W. P. e Silva, C. M. D. P. S., Tratamento de Dados Experimentais UFPB Editora Universitária, João Pessoa, PB, 2a Edição, (1998).
- [12] Helene, Otaviano A. M. e Vanin, Vitor R., Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental, Ed. Edgard Blücher LTDA, São Paulo, (1981).
- [13] Bevington, P. R., e Robinson, D. K., Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, WCB/McGraw-Hill, Boston, Second Edition, (1992).
- [14] Taylor, J. R., An Introduction to Error Analysis, 2nd Edition, University Science Books, Sausalito, California, (1997).
- [15] Costa, A., Erros e Algarismos Significativos, Gazeta de Física, V 26 (4), p.4-10, out. (2003).

LA MAGIA DE LA FÍSICA

E. Juaniquina, W. Espinoza, D. López, E. Centeno, M. Saavedra

*Carrera de Física—UMSA
La Paz, Bolivia*



Figura 1. Atrio U.M.S.A. en Annus Mirabilis 2005.

1. INTRODUCCIÓN

Este proyecto consiste en reproducir experimentos sencillos de física, de una manera amena y de fácil comprensión que describen principios físicos básicos, para ser explicados y demostrados al público en general.

Esta actividad surgió inicialmente hace cuatro años por iniciativa estudiantil, con el apoyo de algunos docentes y administrativos para un aniversario de la Carrera, pero poco a poco se fue convirtiendo en una actividad periódica, desarrollada por los estudiantes que llevan a las personas en general al fascinante mundo de la física.

El objetivo principal de “La Magia de la Física” es el de ofrecer un programa de difusión y divulgación de la física a través de experimentos interactivos de fácil comprensión, que demuestran principios y leyes básicas de esta ciencia, estimulando de esta manera a que cualquier estudiante, docente o administrativo interesado pueda presentar algún experimento o demostración que le resulte atractiva y didáctica.

2. ALCANCES

Estas exposiciones se vienen realizando periódicamente en diferentes plazas públicas y en otros casos por invitación en establecimientos educativos de la ciudad de La Paz y El Alto.

En este “Año Internacional de la Física” este proyecto se propuso llegar a las provincias de La Paz y al interior del país, es así que, con el apoyo de la Carrera y del IIF se logró viajar al interior realizando presentaciones en las ciudades de:

- ORURO (Plaza Principal 10 de Febrero) el 31 de Julio.
- POTOSI (Plaza Principal 10 de Noviembre) el 1° de Agosto.
- SUCRE (Casa de la Cultura) el 3 de Agosto.
- TARIJA (Plaza Central Sucre) el 5 de Agosto.

En todas estas presentaciones en el interior se mantuvo un horario aproximadamente de 2 a 6 de la tarde con una amplia aceptación del público en general, con cobertura de medios de comunicación radiales y televisivos locales. Se culminó esa semana con gran satisfacción por parte de la delegación de estudiantes que realizó esta experiencia inolvidable.

Por otra parte este proyecto recibió una invitación de AMEC-MONTERO, de la ciudad de Montero, Santa Cruz, a finales del mes de Abril, en tal sentido se realizaron presentaciones en el Coliseo de Montero, los días 27, 28, 29 y 30 de Abril abarcando aproximadamente unos 2000 estudiantes en los cuatro días, ya que las exposiciones se las realizaban tanto en la mañana como en la tarde. La delegación de estudiantes de “La Magia de la Física” están gratamente agradecidos por el trato en dicha ciudad y ampliamente satisfechos por el conocimiento científico impartido a la juventud montereña.

3. EXPERIMENTOS

Detallamos a continuación algunos experimentos que conforman “La Magia de la Física”.



Figura 2. Plaza Principal 10 de Noviembre, Potosí.

3.1. El acelerador electrostático

Material: Esfera pequeña cargada.

Experiencia: En la experiencia se alimenta al acelerador, mediante una banda en movimiento hecha de material aislante, ésta transporta la carga a la terminal (esfera) de alto voltaje, en donde se remueve por otra punta de corona y pasa al conductor exterior. Afuera de la terminal se encuentra una fuente de iones negativos que caen hacia el potencial positivo de la terminal. Adentro de la terminal de alto voltaje, el haz pasa a través de una cámara que consta de un gas o de una hoja delgada de metal, diseñada para retirar o despojar a varios electrones de los iones negativos convirtiéndolos en positivos que luego caen al potencial positivo.

Los iones cargados positivos son repelidos por la terminal para formar el haz del acelerador y se produce ese chisporroteo característico.

Explicación: El estudio de núcleos implica acciones nucleares, cuando un haz de partículas inciden en un blanco. Un método empleado para acelerar partículas en reacciones nucleares se basa en una técnica electrostática. Una partícula de carga positiva cae a través de un cambio negativo en el campo potencial el aumento en la energía cinética supone que la partícula inicia del reposo.

Los átomos ionizados para obtener la máxima energía para el haz deben tener la máxima diferencia de potencial.

El potencial final esta limitado por el chisporroteo que ocurre en el aire.

Este principio de la electrostática se aplicó primero a partículas nucleares en aceleración por Robert Van Der Graaff y al acelerador se conoce como acelerador de Van Der Graaff. Se alcanzaron fácilmente potenciales de varios millones de voltios.



Figura 3. Experimentos de electricidad (la bobina Tesla).

3.2. La gota de aceite

Material: Un frasco de cristal transparente, un vaso pequeño, un vaso grande, un embudo, aceite, alcohol y agua purificada (hervida).

Experiencia: Se tiene agua en el vaso grande se añade aceite, se puede ver que el aceite no se mezcla con el



Figura 4. Casa de la Cultura, Sucre.

agua además que el aceite está flotando sobre el agua. Pero entonces ¿cómo podemos lograr una gota de aceite pueda bajar y mantenerse en medio de un líquido?

Sabemos que si seguimos echando agua la gota de aceite seguirá flotando sobre el agua y solo subirá en altura de acuerdo a la cantidad de agua que se le eche, entonces que tal si echamos alcohol!!

Llenamos de aceite hasta el borde del vaso pequeño, introducimos en el frasco de cristal, primero añadimos alcohol lo suficiente para que llegue al borde de la altura del vaso pequeño, luego, con ayuda del embudo echamos agua, con mucho cuidado y por las paredes del cristal, lo suficiente como para ver que la gota de aceite va desalojando el vaso pequeño, todo este proceso se tiene que realizar con cuidado y tiempo, en caso de que el aceite no desaloje el vaso se le puede ayudar con la jeringa. Y listo!! se tiene una gota de aceite flotando en medio de dos líquidos.

Algo que también se puede observar es la forma que tiene el aceite viendo desde la parte superior del frasco, tiene una forma redonda, y viendo desde un punto inferior, a una altura media del frasco, tiene una forma de huevo achatado!!, la pregunta del millón es ¿cuál es la verdadera forma que toma la gota de aceite?

Explicación: Aquí sólo tomamos en cuenta la densidad de los líquidos, cuan livianos o cuan pesados son los líquidos, sabemos que la densidad del aceite es menor que la densidad del agua es por eso que el aceite flota sobre el agua, para tener una gota de aceite en medio de un líquido tenemos que añadir un líquido diferente al agua, diferente en densidad, la densidad de este líquido tiene que ser menor a la densidad del aceite y del agua, este líquido es el alcohol.

La verdadera forma que toma la gota de aceite es esférica gracias a la tensión superficial, pero ¿por qué se ven diferentes formas viendo desde dos puntos diferentes? se ve algo que no es, eso se llama ilusión óptica, la imagen que sale de la gota de aceite cambia de dirección al pasar por la sustancia agua alcohol también cambia su dirección al pasar por el frasco hasta llegar a nuestros ojos, esto debido a la refracción de la luz.

3.3. *El efecto coanda*

Material: Una botella, una caja y una vela.

Experiencia: Se enciende la vela y se la sopla directamente, obviamente la vela se apagará, después se pone la cajita delante de la vela y se trata de apagar la vela soplando hacia la caja, la vela no se apaga. Finalmente se reemplaza la caja por la botella u otro material de forma cilíndrica y se repite la operación de soplar, esta vez soplando directamente a la botella, la vela se apagará. Es preferible tener la botella llena de agua o refresco, para mostrar que no tiene huecos ni trampa.

Explicación: Este experimento nos va a demostrar algunas propiedades de los fluidos, éstos siempre tienden a seguir la dirección que se les ha dado, muchas veces inclusive cuando encuentran un obstáculo tratan de rodearlo dependiendo de la forma que tenga éste, en el

caso de la caja, ésta tiene una superficie plana y unos ángulos muy pronunciados, entonces el aire choca con la superficie y comienza a formar turbulencias y eventualmente el ímpetu con el cual llega a la caja se disipa, si uno es más observador se dará cuenta que pese a eso logra pasar algo de aire al otro lado; en el caso de la botella el líquido no encuentra resistencia a su movimiento por dos razones, los fluidos en movimiento se pegan a la superficie por donde están circulando por la viscosidad de éstos, en segundo lugar al aplicar una velocidad de aire alrededor de la botella se está bajando la presión atmosférica en todo ese sector, ante la diferencia de presión el aire alrededor empuja al aire que se mueve haciendo que al final del recorrido de la botella el flujo de viento se unifique de nuevo hasta llegar a la vela que se encuentra del otro lado y se apague.