

Sincronización en osciladores fotocontrolados localmente acoplados

G M Ramírez Ávila

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés,
Casilla 8635, La Paz, Bolivia

E-mail: gramirez@ulb.ac.be

Resumen. En el presente trabajo, se analizan diversas configuraciones de osciladores fotocontrolados localmente acoplados; en particular, se estudiaron las configuraciones con condiciones de borde libre (lineal) y condiciones de borde periódicas (anular). Para el análisis, se utilizó el modelo físico-matemático que se introdujo en [1], del cual se resolvieron numéricamente las ecuaciones diferenciales para diferentes situaciones: osciladores idénticos, no idénticos, idénticos despreciando los efectos sobre la etapa de descarga de los osciladores, acercándolos así a los osciladores de integración y disparo. En cada uno de los casos se consideraron poblaciones de osciladores que van entre 2 y 25 y tomando en consideración una amplia variación en lo que respecta a los valores de acoplamiento. Para el análisis se han utilizado como criterios de sincronización el cumplimiento de enganche de períodos y de enganche de períodos y fases simultáneamente. Finalmente, para cada uno de los casos, se identifican regiones de sincronización en el plano acoplamiento versus número de osciladores.

PACS numbers : 05.45.Xt, 05.65.+b, 85.60.-q, 85.60.Dw, 89.75.-k

Keywords : Synchronization; Coupled oscillators; Collective behavior.

Palabras clave : Sincronización; Osciladores acoplados; Comportamientos colectivos.

1. Introducción

Muchos trabajos han sido dedicados al estudio de diferentes tipos de osciladores localmente acoplados en configuraciones unidimensionales. Fenómenos tales como el enganche de fases [2, 3], secuencias de osciladores con las mismas frecuencias [4], transiciones de fase [5], formación de patrones [6], ondas viajeras [7], y formación de cúmulos [8] son comunes en cadenas de osciladores; todos estos fenómenos están ligados a la sincronización, es decir, al ajuste de ritmos de objetos oscilantes debido a sus interacciones, que en general son débiles [9]. Los osciladores de integración y disparo han sido ampliamente utilizados para describir y modelar una gran variedad de fenómenos, tales como la sincronización en luciérnagas [10]. Un oscilador de integración y disparo es un oscilador de relajación típico y está caracterizado por una variable de estado similar al voltaje V , la cual crece hasta alcanzar un umbral para luego "disparar" haciendo que V vuelva instantáneamente a su nivel de base. Recientemente, un nuevo tipo de oscilador que describe fenómenos de sincronización de una forma muy sencilla ha sido introducido [1] y se los ha denominado osciladores fotocontrolados, para los cuales se utiliza la abreviación LCO proveniente del inglés Light-Controlled Oscillator. La motivación original de este oscilador fue el de modelar la comunicación en algunos sistemas biológicos, tales como el de luciérnagas, pero se pudo verificar que este oscilador puede tener otro tipo de aplicaciones. Este trabajo es una

extensión de resultados previamente obtenidos para cadenas pequeñas de 2 y 3 LCOs. En el presente trabajo, se extiende el análisis a poblaciones más grandes de LCOs que van de 2 a 25 osciladores y en dos configuraciones parecidas. En este artículo, se estudia y caracteriza el comportamiento síncrono en configuraciones con condiciones de borde libres (lineal) y periódicas (anular) de LCOs. En la sección 2 se describe el modelo y los criterios de sincronización. En la sección 3 se presentan los resultados. Finalmente, en la sección 4 se discuten los resultados, comparándolos con otros previamente publicados en los cuales se trabajaba con osciladores distintos a los LCOs.

2. El modelo

Como fue descrito en [11, 1], un LCO es un oscilador de relajación electrónico en el sentido de que este posee dos escalas de tiempo, las cuales están asociadas a ciclos en los que se tienen variaciones de voltaje lentas (etapa de carga) y variaciones de voltaje rápidas (etapa de descarga y en la cual el LCO emite un pulso luminoso). Cada LCO consiste de un chip LM555 conectado para funcionar en su modo oscilatorio astable (figura 1). El inicio de las etapas de carga y descarga están determinados por dos umbrales bien definidos y situados a $V_M/3$ y $2V_M/3$ respectivamente; siendo V_M el voltaje de la fuente. El período de un LCO está relacionado con los valores de las resistencias (R_λ, R_γ) y del condensador (C) y está dado por $T = T_\lambda + T_\gamma$, donde $T_\lambda = (R_\lambda + R_\gamma)C \ln 2 = \ln 2/\lambda$ es el intervalo de tiempo en el cual toma lugar la carga y $T_\gamma = R_\gamma C \ln 2 = \ln 2/\gamma$ el correspondiente a la etapa de descarga. Un LCO está caracterizado por el voltaje de salida $V(t)$ tomado en la pata 3 del chip LM555. Los LCOs pueden interactuar entre ellos por medio de pulsos luminosos, por lo que están equipados con fotosensores y LEDs que posibilitan el acoplamiento óptico (figura 1). Los fotosensores actúan como fuentes de corriente cuando están recibiendo luz, haciendo que el tiempo de carga del condensador se acorte y/o haciendo que el tiempo de descarga del mismo se alargue.

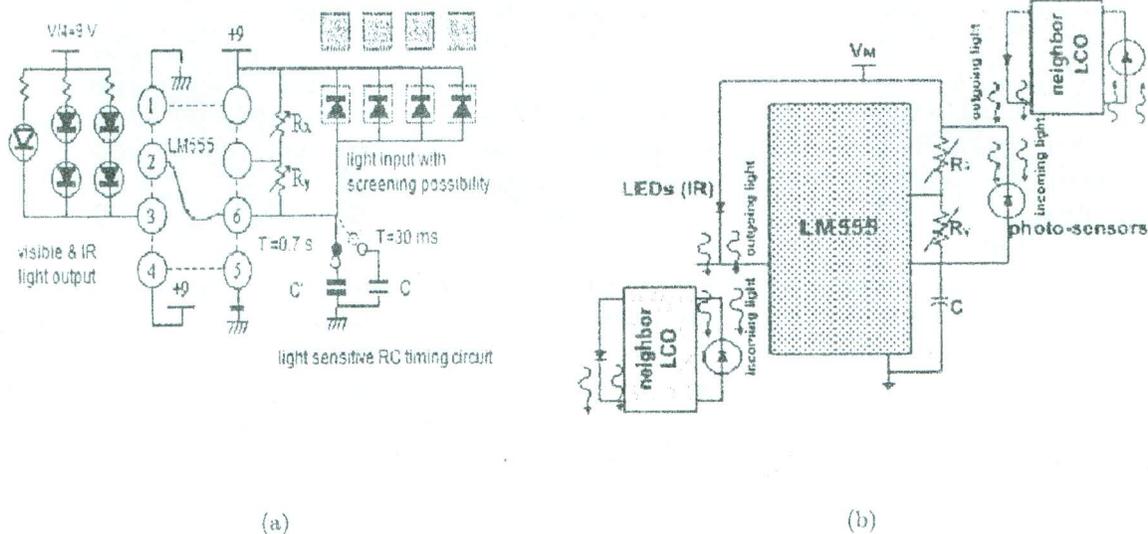


Figura 1. (a) Diagrama de bloques de un LCO. (b) Diagrama simplificado del LCO y vista esquemática del acoplamiento entre LCOs.



Las ecuaciones que describen el modelo para N LCOs son:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda_i[(V_{Mi} - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{i,j}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)], \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

donde β_{ij} es la intensidad de acoplamiento, $\delta_{ij} = 1$ si los LCOs pueden interactuar y $\delta_{ij} = 0$ en otro caso, y $\epsilon_i(t)$ es el estado del oscilador que toma el valor 1 (etapa de carga) ó 0 (etapa de descarga); $\epsilon_i(t)$ cambia su valor cuando se alcanza el umbral superior ($2V_M/3$) o el umbral inferior ($V_M/3$). Se debe mencionar que el modelo ha sido validado experimentalmente [1].

Utilizando (1), se pueden escribir las ecuaciones correspondientes a cada uno de los casos estudiados. En el caso de LCOs idénticos en una configuración lineal:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_1(t))\epsilon_1(t) - \gamma V_1(t)[1 - \epsilon_1(t)] + \beta[1 - \epsilon_2(t)], \quad (2)$$

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \beta[2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t)], \quad 1 < i < N, \quad (3)$$

$$\frac{dV_N(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_N(t))\epsilon_N(t) - \gamma V_N(t)[1 - \epsilon_N(t)] + \beta[1 - \epsilon_{N-1}(t)]. \quad (4)$$

Para LCOs idénticos en una configuración lineal y despreciando la influencia sobre la etapa de descarga, se tendrá que el acoplamiento β sólo puede actuar en el término de carga. Como consecuencia de ello, β siempre estará ligado al término de carga y el tiempo del proceso de descarga (duración del pulso luminoso) será constante. Las ecuaciones en este caso están dadas por:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = [\lambda(V_M - V_1(t)) + \beta(1 - \epsilon_2(t))]\epsilon_1(t) - \gamma V_1(t)[1 - \epsilon_1(t)], \quad (5)$$

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = [\lambda(V_M - V_i(t)) + \beta(2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t))]\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)], \quad 1 < i < N \quad (6)$$

$$\frac{dV_N(t)}{dt} = [\lambda(V_M - V_N(t)) + \beta(1 - \epsilon_{N-1}(t))]\epsilon_N(t) - \gamma V_N(t)[1 - \epsilon_N(t)]. \quad (7)$$

Para LCOs que no son idénticos y acoplados en una configuración lineal, la descripción se hace con(2)-(4), excepto por el hecho de que cada LCO tendrá un parámetro λ diferente. Para la configuración anular, las anteriores ecuaciones permanecen prácticamente inalteradas con la condición $\epsilon_{N+1} = \epsilon_1$ debida a las condiciones de borde periódicas.

3. Resultados

Utilizando observaciones experimentales y numéricas, se mostró en [1] una fuerte dependencia a las condiciones iniciales incluso para sistemas compuestos sólo por 2 LCOs. Se resolvieron numéricamente las ecuaciones para cadenas de 2 a 25 LCOs, variando el acoplamiento desde $\beta = 10$ hasta $\beta = 1000$ en pasos de $\Delta\beta = 10$ y realizando 100 simulaciones para cada caso con el fin de obtener una buena estadística. Se utilizaron los siguientes valores de parámetros: $R_\lambda = 100 \text{ k}\Omega$, $R_\gamma = 1,6 \text{ k}\Omega$, $C = 0,47 \text{ }\mu\text{F}$. Cuando los LCOs no son idénticos, $\lambda_i = 1/(R_\lambda + \xi_i + R_\gamma)C$, donde ξ_i es un número aleatorio que sigue una distribución Gaussiana con media igual a cero y varianza igual a $10^4 \text{ }\Omega$. Para el caso en el que la sincronización no es alcanzada, se observa un mínimo de 7500 eventos de encendido.

Se utilizaron dos criterios para estudiar la sincronización, el primero considera eventos de encendido casi simultáneos con diferencias de fase constantes, en tanto que el segundo, considera la igualdad de períodos como criterio para la sincronización. El criterio de la diferencia de fases (PDC) es bastante fuerte, en el sentido que sólo se consideran como sincronizados a aquellos

LCOs que están emitiendo sus pulsos luminosos casi simultáneamente y que mantienen sus diferencias de fase constantes, mientras que en el criterio del período (PC), la simultaneidad de los eventos de encendido no es estrictamente necesaria. Para visualizar el comportamiento sincrónico de los LCOs utilizando ambos criterios, se construyeron las figuras 2 y 3 las cuales muestran la proyección sobre el plano número de osciladores (N)-acoplamiento (β), con el porcentaje de eventos sincronizados (PSE) representado por la escala de colores.

Se encuentra que las superficies generadas por los criterios anteriores y configuraciones, no están correlacionadas de manera simple. Para determinar cuál de las configuraciones maximiza el PSE, se obtiene el valor medio y la desviación estándar (para todo N y para todo β) del PSE (see table 1). Utilizando el PC, los valores del PSE son mayores que utilizando el PDC, puesto

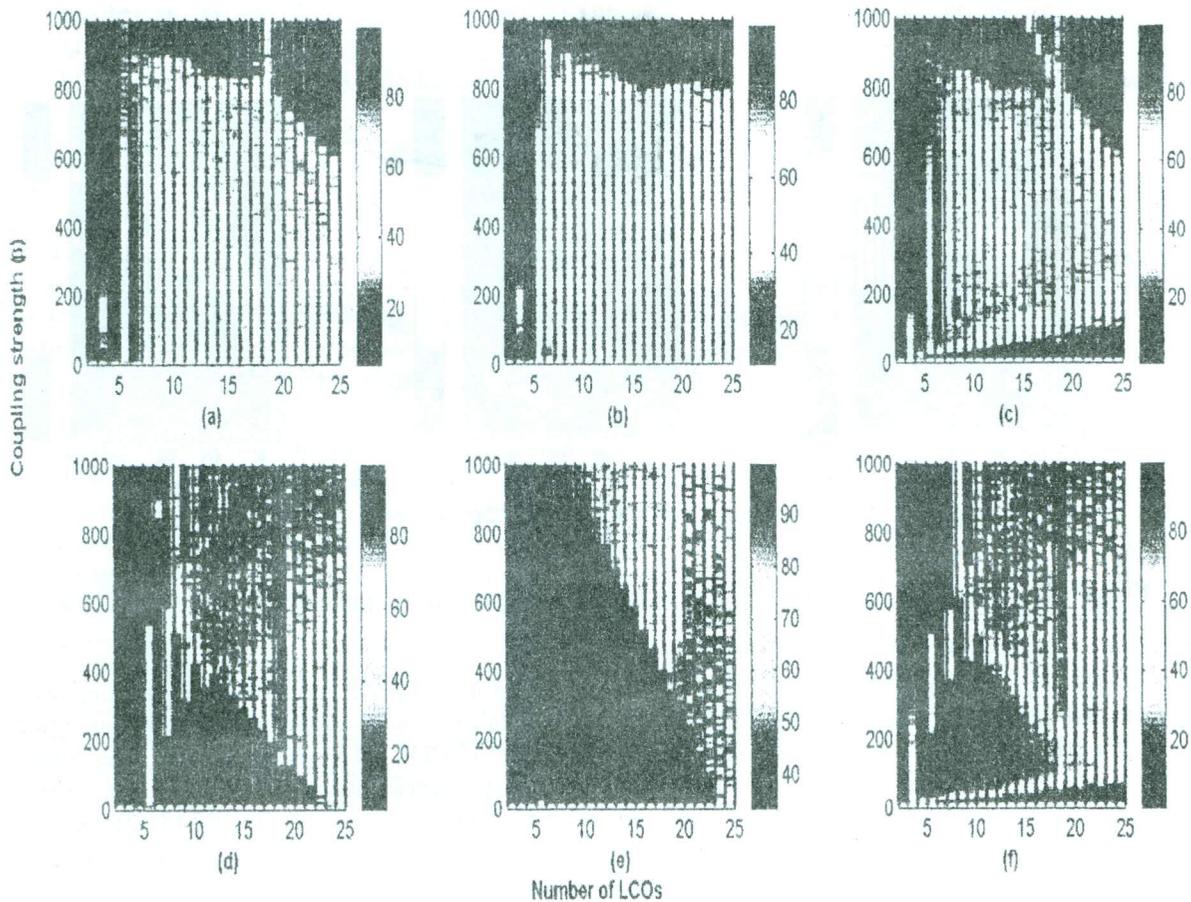


Figura 2. Criterio de la diferencia de fase para la sincronización en una configuración lineal (primera fila) y en una configuración anular (segunda fila) para LCOs idénticos (a) y (d), LCOs idénticos LCOs despreciando los cambios en la etapa de descarga (b) y (e), y para LCOs no idénticos (c) y (f). La escala de colores representa el porcentaje de eventos sincronizados.

que como se señaló anteriormente, este último es un criterio más fuerte. A partir de los resultados que se muestran en el cuadro 1 se constata que considerando LCOs idénticos en configuración anular para los cuales se desprecia la acción sobre la descarga, el PSE es mayor que en los otros casos, tanto para el PDC como para el PC. Esto no es sorprendente ya que el hecho de despreciar los efectos sobre la descarga, hace que los LCOs se aproximen a los osciladores de



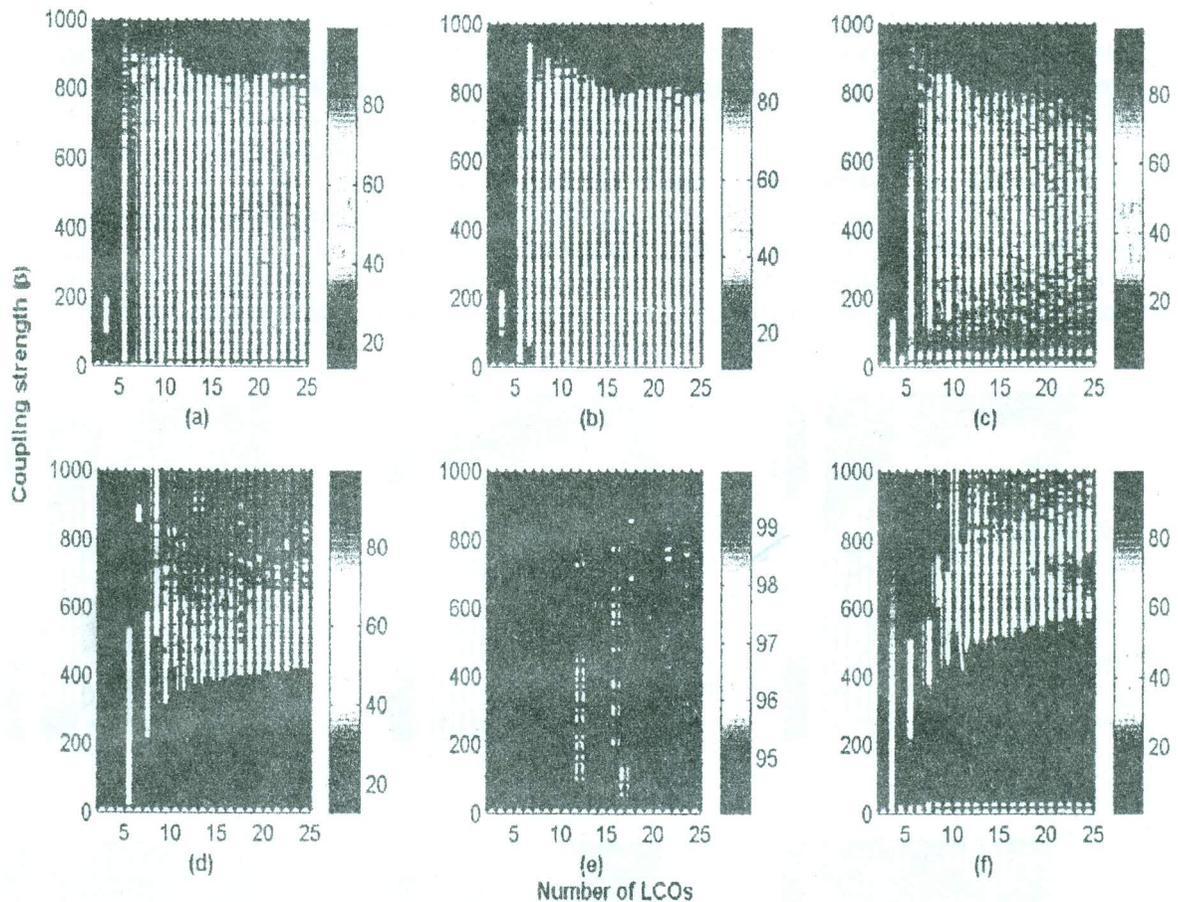


Figura 3. Idem que en la figura 2 pero utilizando el criterio del período para la sincronización.

integración y disparo para los cuales la sincronización total es prácticamente siempre alcanzada [10], es decir., 100% en términos del PSE. Por otro lado, si se comparan las situaciones para LCOs idénticos y no idénticos, se observa que utilizando el PDC, el valor del PSE es ligeramente mayor para LCOs idénticos que utilizando el PC; al contrario, utilizando el PC el resultado se invierte y los valores del PSE es ligeramente mayor en el caso de LCOs no idénticos. Esto podría significar que para LCOs no idénticos acoplados, estos sincronizan formando cúmulos con períodos iguales pero con tiempos de encendido diferentes.

4. Discusión

Nuestros resultados muestran que no hay un comportamiento exactamente predecible. Esto podría estar relacionado con el hecho de que los LCOs son sensibles a las condiciones iniciales, como se ha demostrado para 2 y 3 LCOs [1]. Por lo que, cuanto mayor sea la población, más difícil es predecir el comportamiento del sistema. Sin embargo, las simulaciones permiten identificar regiones en las cuales es más probable de observar sincronización total. Los resultados muestran además que en una cadena lineal, la sincronización es común para cantidades pequeñas de LCOs, pero para 3 y 5 LCOs el PSE cae drásticamente; Para más de 6 LCOs, el PSE es de alrededor de 70% en una amplia región de valores de acoplamiento. Despreciando la acción sobre la descarga, para LCOs idénticos acoplados en una configuración lineal, ambos



Cuadro 1. Valores promedio y desviaciones estándar de los PSE, utilizando todos los valores de N y β para los LCOs acoplados en configuraciones lineal y anular y usando como criterio de sincronización la constancia y limitación de las diferencias de fase y la igualdad de períodos respectivamente.

Configuración	Criterio de sincronización	
	diferencia de fase	período
lineal		
LCOs idénticos	66,46 ± 7,33	73,55 ± 4,69
LCOs idénticos despreciando la acción sobre la descarga	70,45 ± 5,03	71,14 ± 4,84
LCOs no idénticos	64,06 ± 7,40	77,81 ± 3,23
anular		
LCOs idénticos	58,41 ± 12,59	69,32 ± 12,20
LCOs idénticos despreciando la acción sobre la descarga	85,40 ± 6,86	99,88 ± 0,43
LCOs no idénticos	56,99 ± 9,50	77,75 ± 9,64

criterios de sincronización dan resultados casi idénticos. La diferencia con respecto al caso del modelo completo es que para acoplamientos fuertes, el PSE alcanza valores cercanos al 100% usando el modelo simplificado, una situación que no se presenta en el modelo completo donde utilizando el criterio de la diferencia de fase como criterio de sincronización, el PSE disminuye notoriamente para acoplamientos fuertes. En el caso de cadenas lineales de LCOs no idénticos, dependiendo del criterio de sincronización utilizado, el plano β vs. N muestra regiones que difieren considerablemente del caso de LCOs idénticos. Por ejemplo, en el caso de acoplamientos débiles, un dominio con PSEs bajos aparece utilizando el PDC; sin embargo, en el resto de este plano, el PSE es un poco mayor. Para cadenas anulares y para acoplamientos débiles, ambos criterios muestran PSEs cercanos al 100% lo que no parece depender del número de LCOs; aunque, para 5 LCOs este no es el caso y esto puede estar relacionado con los resultados hallados para 5 osciladores en cadenas de osciladores multi-acoplados [3], donde los osciladores de los extremos se “deslizanz nmo son capaces de enganchar sus fases con los osciladores del interior de la cadena. Para la llamada configuración de “doble anillo” descrita en [12] (una cadena anular en nuestro caso) con osciladores no idénticos, estos autores encontraron que un estado síncrono colapsa para una geometría de 13 osciladores, teniendo como consecuencia que la sincronización para N grande no puede subsistir pero produce una forma de sincronización débil en la cadena, es decir, grupos de osciladores vecinos que oscilan con la misma frecuencia en promedio pero no necesariamente con una relación de fases bien establecida. Se obtuvo un resultado similar al de [12] pero para ambos casos, a saber, LCOs idénticos y no idénticos en una configuración anular para una amplia región de valores de acoplamiento. Además, estos resultados confirman lo correcto de ambos criterios de sincronización. Para LCOs idénticos acoplados en una cadena anular y despreciando la influencia sobre la etapa de descarga, se tiene que el PSE es prácticamente de 100% en todos los casos tal como en los resultados hallados por diferentes autores (ver por ejemplo [13, 14]). Ellos aseguran que para redes uni y bidimensionales de osciladores de integración y disparo, siempre habrá sincronización aún cuando esta pueda tomar un tiempo muy largo en producirse. De acuerdo con [14], el tiempo de sincronización es de alrededor 100 períodos para una red de 40×40 o que el tiempo promedio de sincronización aumenta logarítmicamente con el tamaño del sistema [13]. Está claro que despreciar los efectos sobre la descarga constituye una aproximación a los osciladores de integración y disparo. En este trabajo, se encontró que en promedio, la situación de LCOs no idénticos muestra valores mayores del PSE que para el caso de LCOs idénticos, por esto, un estudio más profundo de situaciones con

osciladores no idénticos podría ser importante para confirmar esta diferencia. Nuestra hipótesis es que esto debería ser confirmado, puesto que los sistemas reales que alcanzan sincronización robusta, están compuestos de osciladores no idénticos y las pequeñas diferencias deberían facilitar la sincronización como se observa en la naturaleza [15].

Agradecimientos

Se agradece a los organizadores de la International Conference on Control and Synchronization of Dynamical Systems, en particular al Prof. Alexander Pisarchik por el apoyo dado para que estos resultados puedan ser comunicados en dicha conferencia que se llevó a cabo en León, México del 4 al 7 de octubre de 2005.

Referencias

- [1] Ramírez Ávila G M, Guisset J L and Deneubourg J L 2003 Synchronization in light-controlled oscillators *Physica D* **182** 254-73
- [2] Strogatz S H and Mirollo R E 1988 Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies *Physica D* **31** 143-68
- [3] Ren I and Ermentrout B 2000 Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators *Physica D* **143** 56-73
- [4] Ermentrout G B and Kopell 1984 Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators I *SIAM J. Math. An.* **15** 215-37
- [5] Kopell N. and Ermentrout G B 1990 Phase transitions and other phenomena in chains of coupled oscillators *SIAM J. App. Math.* **50** 1014-52
- [6] Gavrielides A, Kottos T, Kovanis V and G.P. Tsironis 1998 Spatiotemporal organization of coupled nonlinear pendula through impurities, *Phys. Rev. E* **58** 5529-34
- [7] Bressloff P C and Coombes S 1999 Travelling waves in chains of pulse-coupled integrate-and-fire oscillators with distributed delays, *Physica D* **130** 232-54
- [8] Osipov G, Pikovsky A S, Rosenblum M G and Kurths J 1997 Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators, *Phys. Rev. E* **55** 2353-61
- [9] Pikovsky A, Rosenblum M and Kurths J 2001 *Synchronization - A universal concept in nonlinear sciences* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [10] Mirollo R E and Strogatz S H 1990 Synchronization of pulse-coupled biological oscillators *SIAM J. App. Math.* **50** 1645-62
- [11] Guisset J L, Deneubourg J L and Ramírez Ávila G M 2002 The phase information associated to synchronized electronic fireflies *Preprint arXiv nlin.AO/0206036* (available in <http://arxiv.org/abs/nlin.AO/0206036>)
- [12] De Sousa Vieira M, Lichtenberg A J and Lieberman M A 1994 Self-synchronization of many coupled oscillators *Int. J. Bifurc. and Chaos* **4** 1563-77
- [13] Hopfield J J and Herz A V 1995 Rapid local synchronization of action potentials: toward computation with coupled integrate-and-fire neurons *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **92** 6655-62
- [14] Campbell S R, Wang D L and Jayaprakash C 1999 Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators *Neural Comp.* **11** 1595-619
- [15] Camazine S, Deneubourg J L, Franks S, Sneyd J, Theraulaz G and Bonabeau E 2001 *Self-organization in Biological Systems* (Princeton: Princeton University Press)

