

DINÁMICA NO LINEAL APLICADA

Marcelo Ramírez Ávila
Renán Cabrera Lafuente
Carrera de FÍSICA-UMSA
Jaime Rodríguez Fernández
Carrera de BIOLOGÍA-UMSA
La Paz-Bolivia

14 de octubre de 1998

Resumen

Se estudian modelos no lineales en dos y tres dimensiones, para los cuales se empieza por la integración del sistema de ecuaciones y la visualización del comportamiento del sistema en el espacio de fases. Como ejemplo ilustrativo se hizo la simulación de la dinámica de una masa que se mueve a lo largo de un aro el cual rota con una determinada velocidad angular. En este sistema se observa una bifurcación para valores iguales o mayores a una "velocidad angular crítica".

Se tomaron como representantes característicos de los modelos no lineales en dos dimensiones al denominado Bruselator y en tres dimensiones al modelo de Rössler para los cuales se hace el análisis de bifurcación de Hopf en base al desarrollo perturbativo multiescala trabajando en regiones fijadas del espacio de parámetros, encontrándose finalmente la forma normal de la misma para estos casos.

Se empieza con una aplicación biológica que consiste en el estudio del comportamiento de poblaciones de hormigas frente a fuentes de alimentos. Aquí se postula un modelo basado en el hecho de que estos insectos emiten feromonas para reclutar a sus congéneres cuando se ha localizado una fuente alimenticia. El modelo que se presenta aún es muy simple pero de todas maneras presenta un carácter no lineal.

1 Introducción

La ciencia no lineal toma su forma actual gracias a los desarrollos analíticos, numéricos y experimentales que se dieron en el curso de las tres últimas décadas. El surgimiento de esta ciencia va de la mano con las nuevas ideas introducidas por la termodinámica de procesos irreversibles y la mecánica estadística del no equilibrio.

La dinámica no lineal enfoca principalmente sistemas disipativos cuya evolución está influenciada por la variación de algunos parámetros presentes en el

problema que pueden ser modificados externamente, los llamados parámetros de control.

Una diferencia notoria entre leyes lineales y no lineales es que la propiedad de superposición no se mantiene en estas últimas. En un sistema lineal, el efecto final de la acción combinada de dos causas diferentes es simplemente la superposición de los efectos de cada causa tomada individualmente. Pero en un sistema no lineal agregando una pequeña causa a una que ya está presente, esta puede inducir efectos dramáticos que no tienen medida común con la amplitud de la causa.

Se observa también que sin la mantención de una apropiada distancia del equilibrio, la no linealidad no puede por si misma dar lugar a soluciones múltiples.

2 Análisis de Modelos no Lineales

Esta sección está consagrada a estudiar de forma detallada algunos modelos conocidos de la ciencia no lineal.

2.1 Masa en un aro rotante

Este sistema constituye un ejemplo de comportamiento no lineal en el marco de la mecánica clásica. El sistema en cuestión está constituido de un anillo rígido de radio r sometido al campo gravitatorio. Una masa m está ubicada inicialmente a un ángulo θ_0 medido a partir de la parte inferior del diámetro vertical, la cual se mueve sobre el aro sin fricción.

2.1.1 Ecuaciones de movimiento del sistema

El lagrangiano del sistema es:

$$L = g m r \cos \theta(t) + \frac{m [r^2 \omega^2 \sin^2 \theta(t) + r^2 \theta'^2(t)]}{2} \quad (1)$$

por lo que el momento generalizado es:

$$P_\theta(t) = m r^2 \theta'(t)$$

y el hamiltoniano:

$$H = -g m r \cos \theta(t) + \frac{P_\theta^2(t)}{2 m r^2} - \frac{m r^2 \omega^2 \sin^2 \theta(t)}{2} \quad (2)$$

Por lo que finalmente las ecuaciones de Hamilton son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P_\theta} &= \frac{P_\theta}{m r^2} \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} &= g m r \sin \theta + m r^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

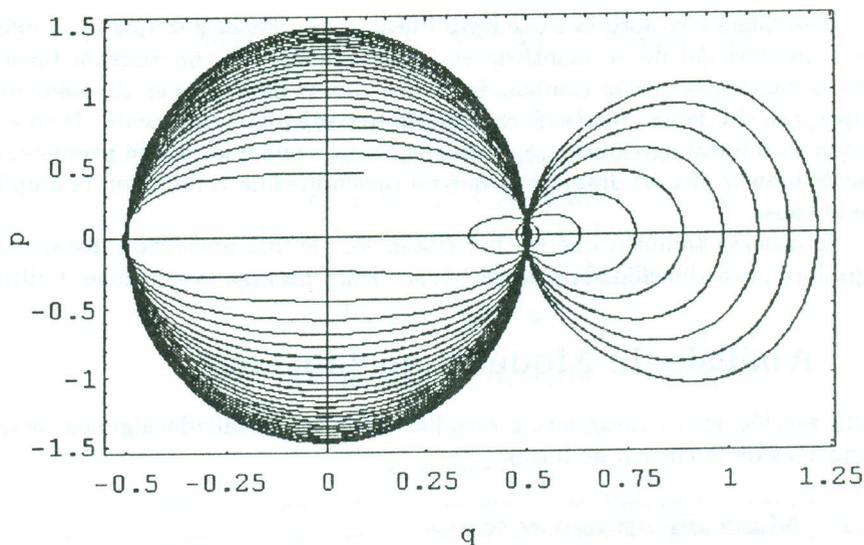


Figura 1: Superposición de las trayectorias en el espacio de fases para diferentes valores de ω . Se observan dos regiones en las cuales la masa oscila, una alrededor de la vertical $q = \theta = 0$ y otra para $q \neq 0$ después de que se ha producido la bifurcación

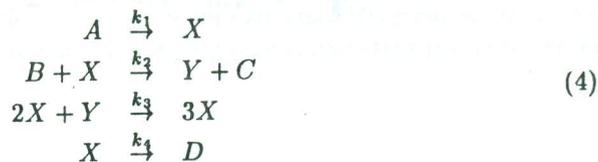
2.1.2 Expansión y resolución numérica del sistema de ecuaciones

Para aplicar el principio de estabilidad lineal, se hizo una expansión en series de Taylor y posteriormente se integró el sistema de ecuaciones mediante el método de Runge-Kutta. ¹ En este caso, el parámetro de control es la velocidad angular de rotación del aro, la cual toma su valor crítico en : $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{r}}$. En la fig. 1 se visualizan las trayectorias en el espacio de fases para diferentes valores de la velocidad angular.

2.2 El Brusselator

Es un modelo autocatalítico a dos variables desarrollado por Prigogine, Lefever y Nicolis [4]. Históricamente es el primer modelo químico que da lugar a oscilaciones sostenidas siendo completamente compatible con las leyes de la física y de la química [1].

La única fuente de no linealidad es la síntesis autocatalítica de X de acuerdo con las reacciones acopladas:



¹Para esto se utilizó Mathematica v.2.2.

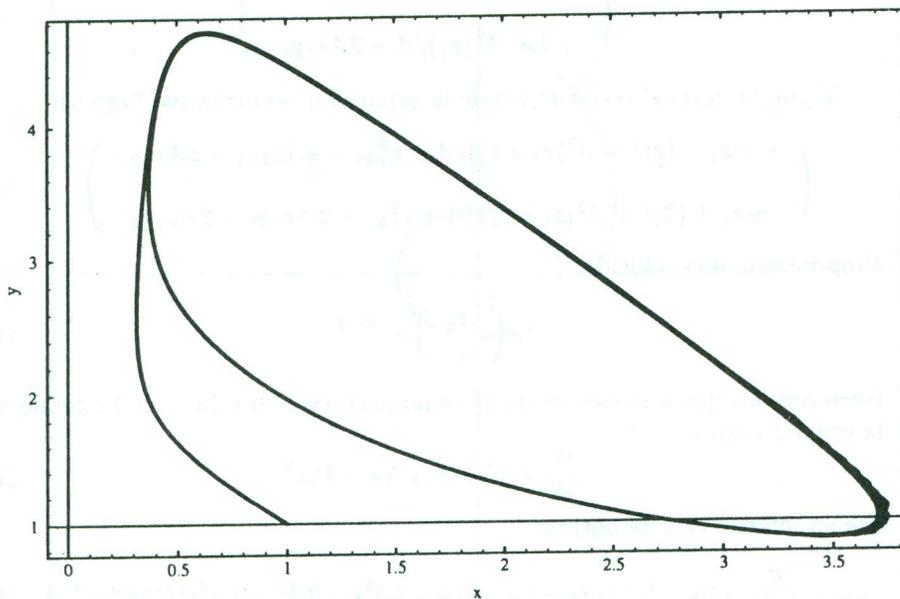


Figura 2: Solución numérica para $(A,B) = (1,3)$, con condiciones iniciales iguales a $(1,1)$

Aquí, las concentraciones de los reactivos A y B son considerados como parámetros fijos y C y D indican productos de deshecho.

Las ecuaciones que dan la evolución de las variables X e Y tomando por simplicidad las constantes de velocidad de reacción igualadas a la unidad son:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - (B + 1)x + x^2y \\ Bx - x^2y \end{pmatrix} \quad (5)$$

En base a este sistema de ecuaciones diferenciales no lineales se desarrolló un programa en Mathematica v. 2.2 que permite hallar los puntos fijos, realizar el análisis de estabilidad lineal, hacer el análisis de bifurcación de Hopf y mostrar las gráficas correspondientes según el valor que tomen los parámetros A y B . Para comenzar mostremos una solución estable típica del sistema de ecuaciones, que se observa en la fig 2.

La linealización de las ecuaciones sobre el punto $(A, B/A)$ resultan en :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + B & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6)$$

El punto crítico para el que la bifurcación se manifiesta es:

$$B = 1 + A^2 \quad (7)$$

,que nace de la condición por la que la traza de la matriz lineal se hace cero. Ahora si suponemos que la solución tiene el factor oscilatorio: $e^{iW_c t}$, hallamos que W_c para la solución crítica es:

$$W_c = A \quad (8)$$

Por otra parte el segundo orden de la expansión perturbativa es:

$$\begin{pmatrix} -((1 + A^2)x_1^2)/A - 2Ax_1y_1 \\ ((1 + A^2)x_1^2)/A + 2Ax_1y_1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Y por su parte el tercer orden de la expansión perturbativa llega ser:

$$\begin{pmatrix} -g_2x_1 - (2(1 + A^2)x_1 * x_2)/A - x_1^2y_1 - 2Ax_2y_1 - 2Ax_1y_2 \\ g_2x_1 + (2(1 + A^2)x_1 * x_2)/A + x_1^2y_1 + 2Ax_2y_1 + 2Ax_1y_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Proponiendo una solución:

$$c \begin{pmatrix} A_x \\ y \end{pmatrix} e^{-W_c T} \tag{11}$$

Encontramos que a menos de un término perturbativo c ($z = ce$) cumple con la ecuación normal:

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \Lambda_c)P_1z - P_3z^3 \tag{12}$$

que en nuestro caso se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \Lambda_c)1/2z - (4i + 6A - 7A^2i + 3A^3 + 4A^4i)/(6A^3)z^3 \tag{13}$$

Para finalizar esta parte veamos la solución (fig 3)de la ecuación normal para el Bruselator cuando la bifurcación tiene lugar.

2.3 El Modelo de Rössler

Este modelo consiste de un acoplamiento de tres ecuaciones con una no linealidad cuadrática simple [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= bx - cz + xz \end{aligned} \tag{14}$$

y es uno de los más conocidos por la forma en la que introduce la noción de caos [2].

2.3.1 Integración del Sistema de Ecuaciones

Como resultado de la integración de (14), se obtienen las gráficas en el espacio de configuraciones, en las cuales, según el valor que tomen los parámetros, se tendrán órbitas homoclinicas, atractores caóticos, etc. v. fig. 4. Este modelo es ampliamente explicado en el artículo "Análisis de Bifurcación de Hopf para el Modelo de Rössler" [5]. Lo más importante a resaltar aquí es que se encontró la forma normal de la bifurcación de Hopf para este modelo, lo cual podemos sintetizar como sigue:

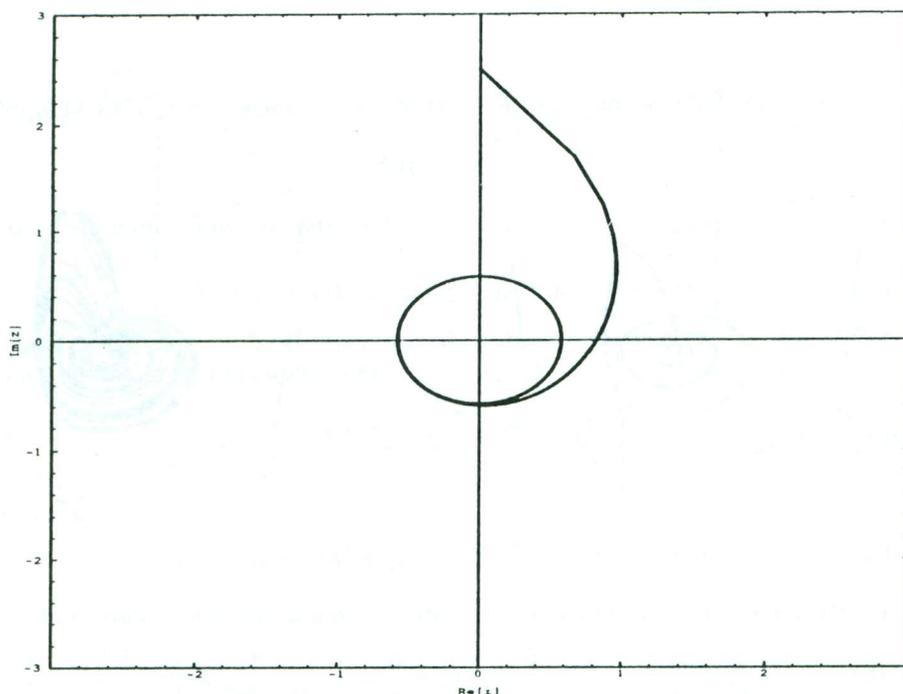


Figura 3: Solución numérica de la ecuación normal para $(A, B) = (2, 5.5)$, con condiciones iniciales iguales a $(0, 2.5)$

2.3.2 Análisis de Bifurcación de Hopf

Para esto, se realizaron las etapas:

Puntos fijos Se determinó que el sistema posee dos puntos singulares:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0 \\ x_2 = c - ab, \quad y_2 = b - \frac{c}{a}, \quad z_2 = \frac{c}{a} - b \end{aligned}$$

Linealización Para esto se hace una especie de cálculo perturbativo, con lo que se encuentra para cada punto singular ecuaciones matriciales de la forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{h}(\mathbf{X}, \lambda) \tag{15}$$

(x_1, y_1, z_1) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ XZ \end{pmatrix} \tag{16}$$

(x_2, y_2, z_2) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c}{a} & 0 & -ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ XZ \end{pmatrix} \tag{17}$$

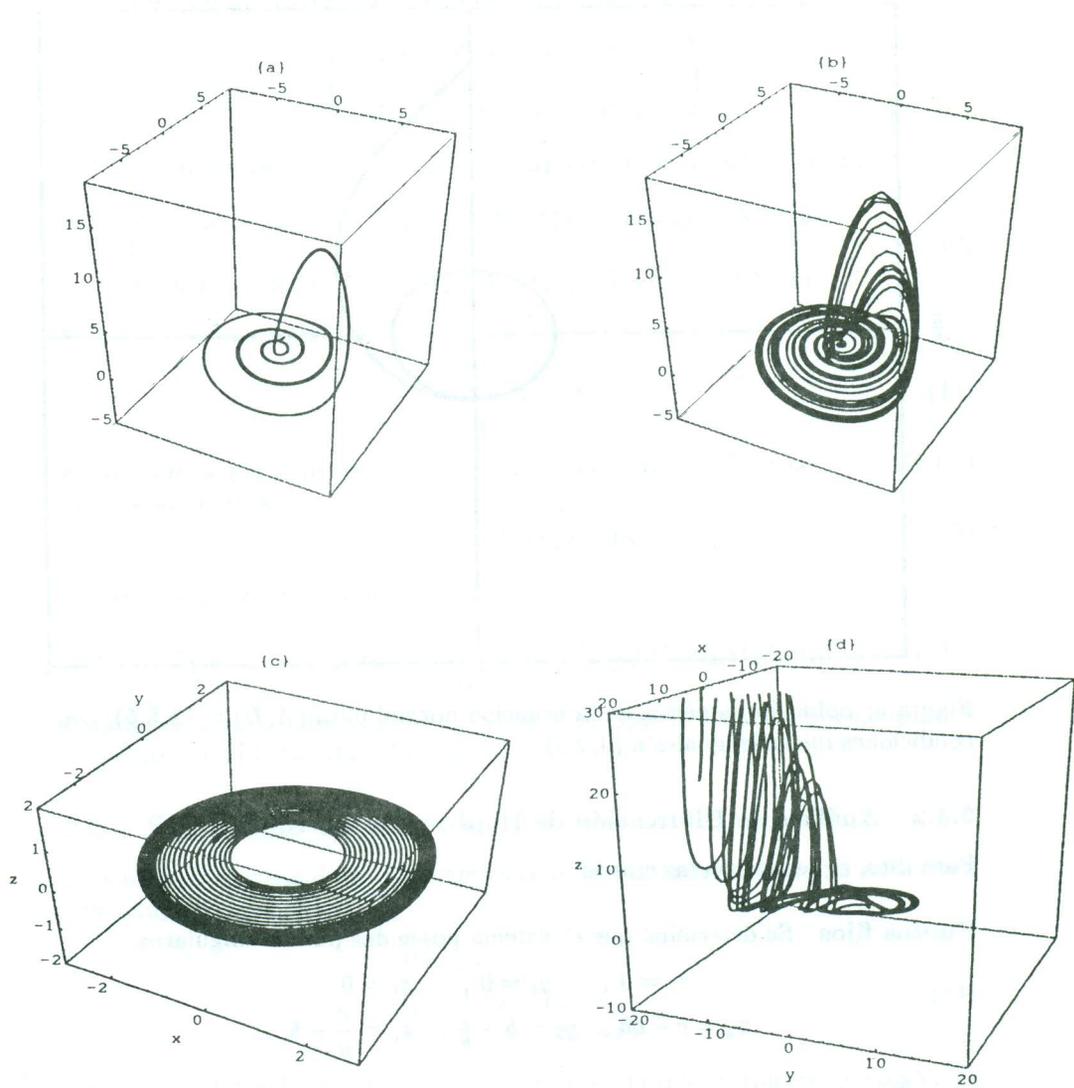


Figura 4: (a) Órbita homoclínica para el modelo de Rössler correspondiente a los valores de los parámetros $a = 0.3501$, $b = 0.30$ y $c = 4.541$. (b) Atractor extraño correspondiente a los valores de los parámetros $a = 0.38$, $b = 0.30$ y $c = 4.8$. (c) Trayectorias periódicas para valores de los parámetros $a = 0.1$, $b = 0.30$ y $c = 4.1$ en una región donde no se manifiesta la bifurcación de Hopf. (d) Trayectorias caóticas para valores de los parámetros $a = 0.48$, $b = 0.30$ y $c = 5.6$

Ecuación Característica Para determinar la misma se debe empezar con:

$$\det(\mathcal{L} - \lambda I)$$

Para cada punto singular se tendrá:

(x_1, y_1, z_1) :

$$\lambda^3 + (c - a)\lambda^2 + (1 + b - ac)\lambda + c - ab = 0 \quad (18)$$

Si las raíces son de la forma $(i\omega, -i\omega, \lambda)$, se tendrá de acuerdo con las propiedades de una ecuación cúbica, que:

$$a_{\pm} = \frac{1 + c^2 \pm \sqrt{(1 + c^2)^2 - 4bc^2}}{2c} \quad (19)$$

(x_2, y_2, z_2) :

$$\lambda^3 + a(b - 1)\lambda^2 + (1 + \frac{c}{a} - a^2b)\lambda + ab - c = 0 \quad (20)$$

y de la misma forma con la que se trabajó con el anterior punto, se encuentra:

$$c = \frac{a}{b} + (b - 1)a^3 \quad (21)$$

Es de hacer notar que para el presente análisis, se trabajó con los siguientes intervalos del espacio de parámetros:

$$\begin{aligned} b &= 0.3 \\ 0 &\leq a \leq 0.55 \\ 4 &\leq c \leq 5.8 \end{aligned}$$

Para estos valores de c y a , la relación (21) nunca es satisfecha, en cambio, la relación (19) puede ser satisfecha para a_- .

Entonces, se va a considerar que el parámetro de control es a y en la criticidad se tendrá a_- . Es decir

$$\lambda_c = a_-$$

Por lo que (15) se puede escribir:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{L}(a_-) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{h}(\mathbf{X}, a_-)$$

Desarrollo Perturbativo Multiescala Para hacer este desarrollo se parte de:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 + \dots \\ a - a_- &= \epsilon \gamma_1 + \epsilon^2 \gamma_2 + \dots \\ \frac{d}{dt} &= \Omega_c \frac{\partial}{\partial T} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Se sabe que (18) tiene como soluciones $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\rho + i\omega, \rho - i\omega, \lambda)$ y se ha considerado que el conjunto de soluciones era $(i\omega, -i\omega, \lambda)$, por lo que para determinar Ω_c se tiene:

$$Im \omega_c = \Omega_c = \sqrt{1 + b - a_- c} \equiv \omega \tag{23}$$

Este desarrollo se hace en los tres primeros órdenes de ϵ , con lo que finalmente, se encuentra lo que constituye la **forma normal** de la bifurcación de Hopf [3]

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \lambda_c)P_1 z - P_3 |z|^2 z \tag{24}$$

para el modelo de Rössler:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(a - a_-)U_2^{\dagger*}U_2}{-1 - U_2^{\dagger*}U_2 - U_3^{\dagger*}U_3} z - \frac{U_3^{\dagger*}[\beta'(1 + U_3) + U_3(\delta''' + U_3^* \delta')]}{-1 - U_2^{\dagger*}U_2 - U_3^{\dagger*}U_3} |z|^2 z \tag{25}$$

donde:

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{2a_-}{(a_-^2 + \omega^2)(a_- b - c)} \\ \delta' &= \frac{4\omega^2(4\omega^2 + b + 1) + a_- (4c\omega^2 - c - a_- b) + 2i\omega(4c\omega^2 - c - a_- b - a_- (4\omega^2(4\omega^2 + b + 1)))}{4\omega^2((4\omega^2 + b + 1)^2 - (4c\omega^2 - c - a_- b)^2)} \\ \delta'' &= \frac{4a_- \omega^2(4\omega^2 + b + 1) - (4c\omega^2 + c + a_- b) + i[2\omega(4\omega^2 + b + 1) + 4c\omega^2 - c - a_- b]}{4\omega^2((4\omega^2 + b + 1)^2 - (4c\omega^2 - c - a_- b)^2)} \\ \delta''' &= \frac{(4\omega^2 - 1)(4c\omega^2 - c - a_- b) - 2i\omega(4\omega^2 - 1)(4\omega^2 + b + 1)}{4\omega^2((4\omega^2 + b + 1)^2 - (4c\omega^2 - c - a_- b)^2)} \end{aligned}$$

Es decir, dependen de los parámetros b, c y del parámetro de control a_- .

Resolución de la Forma Normal de la Bifurcación de Hopf Los coeficientes $P_1 = -\frac{U_2^{\dagger*}U_2}{1 + U_2^{\dagger*}U_2 + U_3^{\dagger*}U_3}$ y $P_3 = -\frac{U_3^{\dagger*}[\beta'(1 + U_3) + U_3(\delta''' + U_3^* \delta')]}{1 + U_2^{\dagger*}U_2 + U_3^{\dagger*}U_3}$ son cantidades complejas que pueden escribirse en la forma $P_1 = P_1' + iP_1''$, $P_3 = P_3' + iP_3''$. Entonces para resolver (24) es conveniente trabajar en coordenadas polares $z = re^{i\phi}$ con lo que separando las partes real e imaginaria, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (\lambda - \lambda_c)P_1' r - P_3' r^3 \\ \frac{d\phi}{dt} &= (\lambda - \lambda_c)P_1'' r - P_3'' r^2 \end{aligned} \tag{26}$$

Se sabe también que en $\lambda = \lambda_c$ r sufre bifurcación desde la solución trivial $r_0 = 0$ a la no trivial $r_s = \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_c)P_1'}{P_3'}}$.

Se encuentra finalmente de (26) que:

$$\phi = \phi_0 + \left(P_1'' - \frac{P_3'' P_1'}{P_3'} \right) (\lambda - \lambda_c) t = \phi_0 + \Delta\Omega t \tag{27}$$

La frecuencia $\Delta\Omega$ de la z -oscilación corrige el valor Ω_c por términos del orden de $\lambda - \lambda_c$. Con todos estos elementos, se halló para el modelo de Rössler el ciclo límite para diferentes valores de los parámetros en el espacio elegido. Como un ejemplo se muestra (Fig.5), en el espacio de fases (Imz, Rez) , la manera en que las trayectorias -sin importar la condición inicial- se enrollan hacia la curva invariante $|z| = r_s$, **ciclo límite** lo cual se deduce a partir de la forma normal (25).

En la fig. 6 se muestra la bifurcación de Hopf para el modelo de Rössler.

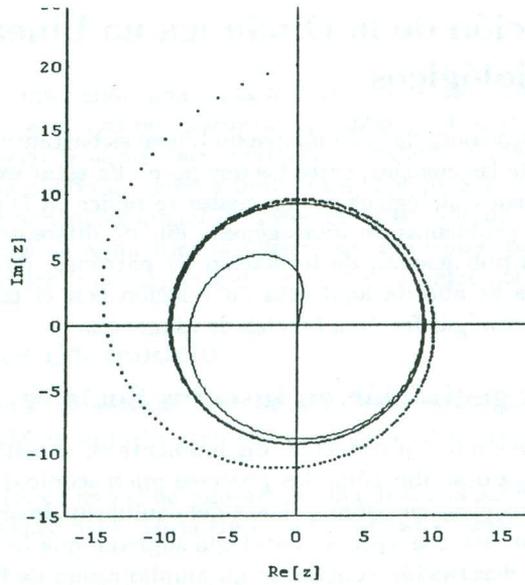


Figura 5: Retrato de fases para la bifurcación de Hopf en el modelo de Rössler con condiciones iniciales $(0.15, \frac{\pi}{2})$ trayectoria de trazo continuo y $(20, \frac{\pi}{2})$ trayectoria de trazo punteado.

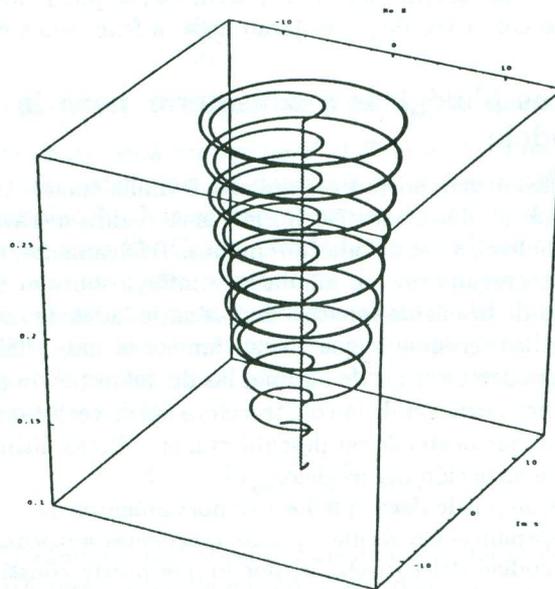


Figura 6: Bifurcación de Hopf para el modelo de Rössler en función del parámetro a y para valores de $b = 0.3$ y $c = 4.8$ con condiciones iniciales $r = 0.1$ y $\phi = \pi/2$.

3 Aplicación de la Dinámica no Lineal a Problemas Biológicos

El campo de aplicaciones de la Dinámica no Lineal es bastante amplio abarcando la mayor parte de las ciencias, entre las que no podía estar excluida la biología. Entre los fenómenos biológicos en los cuales se aplica la Dinámica no Lineal, se pueden citar problemas de morfogénesis [6], de diferentes tipos de ritmos [7], de dinámica poblacional, de formación de patrones, de inmunología, etc. El problema que se aborda aquí está en relación con el comportamiento de poblaciones de hormigas frente a fuentes de alimentos.

3.1 Auto-organización en Insectos Sociales

La auto-organización fue introducida originalmente en el contexto de la física y de la química para describir cómo los procesos microscópicos daban lugar a estructuras macroscópicas en sistemas fuera del equilibrio. Investigaciones recientes que extienden este concepto a la etología sugieren que la auto-organización proporciona una descripción concisa de un amplio rango de fenómenos colectivos en animales, especialmente en insectos sociales. Esta descripción no está en relación con la complejidad individual sino más bien con los aspectos espacio-temporales complejos que surgen a nivel de la colonia, asumiendo que las interacciones entre individuos simples pueden producir comportamientos colectivos altamente estructurados [8]. Una característica importante de la Dinámica no Lineal es el aspecto de la auto-organización. Haciendo referencia a insectos sociales tales como las abejas, hormigas y termitas, se puede mencionar que los comportamientos colectivos de estos darán lugar a fenómenos no lineales.

3.2 Aspectos biológicos a considerar para la formulación del modelo

Uno de los aspectos más importantes para esta formulación será el hecho de considerar que las interacciones entre las hormigas se realiza a través de la emisión de sustancias químicas, denominadas feromonas. Básicamente, una feromona es cierta sustancia segregada por un animal que influye sobre el comportamiento de otros animales de la misma especie. En las sociedades de insectos, han sido identificadas muchas feromonas que tienen funciones muy diferentes entre sí, entre las que se pueden citar las de alarma, las de delimitación de territorio, las implicadas en la organización de la construcción, las de reclutamiento hacia una fuente de alimento que acaba de ser descubierta, etc. Estas últimas constituirán la base para la construcción del modelo.

Teóricamente, se puede decir que los comportamientos de reclutamiento son mecanismos de amplificación similares a las reacciones autocatalíticas como la mostrada en el modelo del Bruselator, por lo que puede constituir una fuente importante de no linealidad. Este reclutamiento alimentario, puede explicarse de la siguiente manera: una hormiga que ha descubierto una fuente alimenticia

regresa a su nido, marcando una pista a través de la emisión de feromona, la cual estimulará a los demás miembros de la población a salir del nido y seguir esta pista, para luego de alimentarse regresar reforzando el marcado de la pista, favoreciendo así la salida de nuevos individuos, por lo que se espera observar un crecimiento exponencial inicial de insectos alrededor de la fuente. En la práctica, las fuentes de alimentación pueden ser múltiples, por lo que existirá un proceso de elección y una especie de competición entre las fuentes.

3.3 Objetivos del modelo

La formulación del modelo tiene como primer objetivo estudiar la influencia de los tiempos de vida de la pista y su efecto sobre la elección resultante a nivel colectivo.

El segundo objetivo será el de comprender la influencia del número de fuentes disponibles simultáneamente en la elección de los individuos.

3.4 Formulación del modelo

Como se mencionó anteriormente, una de las variables más importantes del modelo la constituye la concentración de feromona sobre la pista. Si se denomina C_i a la concentración de feromona sobre la pista que proviene de la i -ésima fuente, con $i = 1, \dots, f$, siendo f el número total de fuentes. Se puede postular una *ecuación de balance* de la forma:

$$\frac{dC_i}{dt} = A_i - P_i \quad (28)$$

con: A : término de aporte. P : término de pérdida o desaparición.

El término de aporte será proporcional al *flujo de hormigas* ϕ y a la *cantidad de feromona depositada por las hormigas* q_i . Estas dos dependencias son reunidas en la variable Φ_i . Por un lado se espera que el aporte sea una función creciente de la concentración C_i que tienda hacia un plateau para valores elevados de esta variable. Por otra parte, se puede suponer que A_i es una función decreciente de la concentración de feromona sobre las otras posibles pistas. En tanto que esta dependencia sea más pronunciada, la cooperatividad del proceso será más marcada. Si se representa estos procesos por una función similar a la de Hill de la cinética enzimática:

$$A_i = \Phi_i \frac{(k + C_1)^l}{\sum_{j=1}^f (k + C_j)^l} \quad (29)$$

donde: k es un parámetro de umbral por encima del cual la cooperatividad se manifiesta y l caracteriza el grado de cooperatividad.

El término de pérdida se puede relacionar con la concentración sobre un pista dada mediante una reacción química de primer orden, de la forma:

$$E_i = \nu_i C_i \quad (30)$$

con ν_i representando la tasa de desaparición (sobre todo debido a efectos de evaporación) que juega el rol también de la constante de velocidad de la reacción.

Por consiguiente, la forma general de las ecuaciones del modelo podrá escribirse como:

$$\frac{dC_i}{dt} = \Phi \frac{(k + C_1)^l}{\sum_{j=1}^f k + C_j)^l} - \nu_i C_i \tag{31}$$

Donde se ha tomado la hipótesis simplificadora $\Phi_i = \Phi$.

3.4.1 Modelo con dos fuentes

Primeramente se considerará el caso más sencillo del modelo: Fuentes simétricas. En este caso, se puede considerar que las tasas de desaparición de feromona son iguales: $\nu_1 = \nu_2$. En la ecuación del aporte, se caracterizará al coeficiente l con los valores 1 en caso de no existir cooperatividad y con 2 en caso contrario.

Modelo sin cooperatividad En este caso, las ecuaciones del modelo toman la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \Phi \frac{k+C_1}{2k+C_1+C_2} - \nu C_1 \\ \frac{dC_2}{dt} &= \Phi \frac{k+C_2}{2k+C_1+C_2} - \nu C_2 \end{aligned} \tag{32}$$

Para el estado estacionario se encuentra:

$$C_1 + C_2 = \frac{\Phi}{\nu} - 2k \tag{33}$$

y después de algunos cálculos sencillos:

$$C_1 = C_2 = \frac{\Phi}{2\nu} \tag{34}$$

Modelo con cooperatividad Para esta situación las ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \Phi \frac{(k+C_1)^2}{(k+C_1)^2+(k+C_2)^2} - \nu C_1 \\ \frac{dC_2}{dt} &= \Phi \frac{(k+C_2)^2}{(k+C_1)^2+(k+C_2)^2} - \nu C_2 \end{aligned} \tag{35}$$

Para el estado estacionario se tendrá:

$$C_1 + C_2 = \frac{\Phi}{\nu} \tag{36}$$

que después de algunas operaciones algebraicas, se llega a:

$$\left(C_2 - \frac{\Phi}{2\nu}\right) \left(C_2^2 - \frac{\Phi}{\nu}C_2 + k^2\right) = 0 \tag{37}$$

De aquí se observa que existen tres soluciones: la *solución homogénea* $C_1 = C_2 = \frac{\Phi}{2\nu}$ y dos soluciones inhomogéneas simétricas dadas por:

$$\begin{aligned} C_{1+} = C_{2-} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi}{\nu} - \sqrt{\left(\frac{\Phi}{\nu}\right)^2 - 4k^2} \right) \\ C_{1-} = C_{2+} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi}{\nu} + \sqrt{\left(\frac{\Phi}{\nu}\right)^2 - 4k^2} \right) \end{aligned} \tag{38}$$

Se observa que la condición de existencia de las soluciones inhomogéneas es:

$$\frac{\Phi}{\nu} \geq 2k \quad (39)$$

A partir de estos resultados, es posible hacer un análisis de estabilidad lineal como los realizados para los modelos de la anterior sección y en base a ello poder sacar algunas conclusiones acerca de los fenómenos no lineales que se producen a nivel de la población.

4 Conclusiones

Se ha observado la diversidad de las aplicaciones de la Dinámica no Lineal en diferentes modelos.

El aspecto más relevante es el de que se ha podido desarrollar primariamente un modelo no lineal para el comportamiento de hormigas frente a fuentes de alimentación, el mismo que es susceptible a ser analizado por las técnicas propias de la Dinámica no Lineal.

Referencias

- [1] Nicolis G., 1995 *Introduction to nonlinear science*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Gaspard P., Nicolis G., 1983. What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics? *J. Stat. Phys.* **31**, 499-518.
- [3] Guckenheimer J., Holmes Ph., 1983 *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer, Berlin.
- [4] Volkenshtein M.V., 1985 *Biofísica*, Mir, Moscú.
- [5] Ramírez M., Cabrera R. 1998 *Análisis de Bifurcación de Hopf para el Modelo de Rössler*, Carrera de Física - U.M.S.A., La Paz.
- [6] Turing A., 1952. The chemical basis of morphogenesis *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **B237**, 37-72.
- [7] Goldbeter A., 1993 *Rythmes et chaos dans les systèmes biologiques*, Hermann, Paris.
- [8] Bonabeau E., Theraulaz G., Deneubourg J-L., Aron S., Camazine S., 1997. Self-organization in social insects *TREE* **12-5**, 188-193.